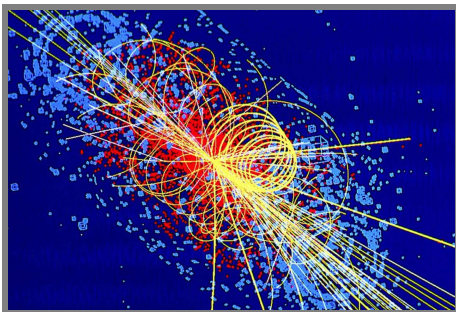


Particules et noyaux

$$\sigma = \frac{2\pi V}{\hbar v} \sum_{f \neq i} |\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i)$$



Simulation d'une collision de particules durant laquelle des bosons de Higgs sont produits (CERN, 1997)



Manutention protocolaire d'échantillons radioactifs...
(The Simpsons, saison 10, épisode 21)

Avant-propos

L'unité d'enseignement « Particules et noyaux » de CY Cergy Paris Université est un module d'introduction à la physique subatomique. Réparti sur dix séances d'une heure et demie chacune, le cours magistral ne se focalisera que sur quelques aspects de cette physique très vaste. Nous mettrons en pratique ces notions au cours de travaux dirigés, qui eux aussi occuperont dix séances d'une heure et demie chacune.

La première partie du présent document est un résumé lacunaire du cours magistral. Si le temps le permet, je l'enrichirai au fur et à mesure des années. Je l'ai conçu comme un support permettant de réviser rapidement les notions essentielles vues en classe. Les exercices de travaux dirigés, disponibles en deuxième partie, constituent un complément indispensable à ces premières pages.

Bibliographie choisie

- Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu et Franck Laloë, *Mécanique quantique I et Mécanique quantique II* (EDP Sciences, 2018).
- Michel Davier, *LHC : le boson de Higgs* (Le Pommier, 2013).
- Hermann Haken, Hans C. Wolf et William D. Brewer, *The physics of atoms and quanta* (Springer, 2005).
- Nick A. Jelley, *Fundamentals of nuclear physics* (Cambridge University Press, 1990).
- Elias Khan, *Physique nucléaire au début du XXI^e siècle*, cours du Magistère de physique fondamentale d'Orsay (2009).
- Bogdan Povh, Klaus Rith, Christoph Scholz, Frank Zetsche et Werner Rodejohann, *Particles and nuclei: an introduction to the physical concepts* (Springer, 2015).
- André Rougé, *Introduction à la physique subatomique* (Ellipses, 1997).
- William S. C. Williams, *Nuclear and particle physics* (Oxford University Press, 1991).
- Robert Zitoun, *Introduction à la physique des particules* (Dunod, 2004).

NB Les références marquées d'un « ◦ » sont celles qui ont servi à élaborer le cours magistral et les travaux dirigés.

Coordonnées

- Enseignant : Pierre-Élie Larré
- Bureau : E406 (Laboratoire de physique théorique et modélisation, site de Saint-Martin, bâtiment E, quatrième étage)
- Courriel : pierre-elie.larre@cyu.fr

Table des matières

I	Cours	5
1	Boîte à outils	5
1.1	Unités de la physique subatomique	5
1.1.1	Longueurs et énergies	5
1.1.2	La constante de Planck réduite et la constante de structure fine	5
1.2	Rappels utiles de relativité restreinte	6
2	Particules et interactions fondamentales	7
2.1	Les constituants fondamentaux de la matière	7
2.1.1	De l'atome au quark	7
2.1.2	Les briques élémentaires de la matière	7
2.2	Les interactions fondamentales	8
2.2.1	Les forces électromagnétique, forte, faible et gravitationnelle	8
2.2.2	Les bosons vecteurs et les charges électrique, forte et faible	9
2.2.3	Portée des interactions fondamentales	9
2.2.4	Diagrammes de Feynman	10
2.3	Le modèle standard de la physique des particules	10
2.4	Expériences	11
3	Masse et stabilité des noyaux	12
3.1	Propriétés générales des noyaux	12
3.1.1	Le nombre de masse et le numéro atomique	12
3.1.2	L'énergie de liaison nucléaire et la masse atomique	12
3.2	Mesurer l'énergie de liaison nucléaire	13
3.2.1	Spectrométrie de masse	13
3.2.2	La courbe d'Aston	14
3.3	La formule de Bethe-Weizsäcker	14
3.3.1	Expression	14
3.3.2	L'énergie de volume B_v	15
3.3.3	L'énergie de surface B_s	15
3.3.4	L'énergie de Coulomb B_C	15
3.3.5	L'énergie d'asymétrie B_a	15
3.3.6	L'énergie d'appariement B_p	16
3.4	Stabilité des noyaux	17
3.4.1	L'équation de la vallée de stabilité	17
3.4.2	La radioactivité α	18
3.4.3	La radioactivité β^-	19
3.4.4	La radioactivité β^+	19
3.4.5	La radioactivité γ	20
3.4.6	La loi de décroissance radioactive	20

4	Collisions et désintégrations	21
4.1	Section efficace et section efficace différentielle de collision	21
4.1.1	Définitions	21
4.1.2	Exemples : les sections efficaces différentielles de Rutherford et de Mott	23
4.2	Mécanique quantique des collisions	25
4.2.1	Le taux de transition quantique	25
4.2.2	La règle d'or de Fermi	25
4.2.3	Application à la diffusion de Rutherford	27
4.3	Temps de vie d'un élément instable	28

II Exercices **29**

1	Masse et stabilité des noyaux	29
1.1	Désintégration β^- de l'hydrogène-3 et distance interprotonique dans l'hélium-3	29
1.2	Courbe d'Aston et formule de Bethe-Weizsäcker : instabilité des noyaux lourds	29
1.3	Chaîne de désintégration naturelle de l'uranium-235	29
1.4	Du plutonium-238 pour alimenter une sonde spatiale en électricité	30
1.5	L'uranium dans la nature : âge de la Terre	31
1.6	Effet tunnel et radioactivité α : modèle de Gamow	31
1.7	Diagrammes de Feynman des désintégrations β	33
2	Collisions et désintégrations	33
2.1	Cinématique élémentaire de la diffusion de Rutherford classique	33
2.2	Diffusion d'un photon énergétique par un électron faiblement lié : effet Compton	34
2.3	Faisceau de neutrons sur une lame d'uranium-235	34
2.4	Faisceau de deutons sur une lame de tritium	35
2.5	Libre parcours moyen dans une cible épaisse	35
2.6	Section efficace différentielle de diffusion dans un collisionneur électron-positron	35
2.7	Détection de neutrinos cosmiques	36
2.8	Diffusion élastique d'électrons ultrarelativistes par des noyaux immobiles	36
2.9	Hamiltonien de Fermi	38
2.10	Temps de vie du muon	39

Première partie

Cours

1 Boîte à outils

1.1 Unités de la physique subatomique

1.1.1 Longueurs et énergies

L'unité de longueur habituellement utilisée en physique subatomique est le femtomètre, de symbole fm. Le femtomètre est une unité standard du Système international d'unités (SI). Il est défini comme

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \quad (1)$$

et correspond approximativement à la taille d'un nucléon (c'est-à-dire du proton ou du neutron ; voir section 2.1.1).

L'unité d'énergie habituellement utilisée en physique atomique et subatomique est l'électron-volt, de symbole eV. L'électron-volt est défini comme étant l'énergie cinétique acquise par une particule de charge électrique élémentaire

$$e = 1,60(2) \times 10^{-19} \text{ C} \quad (2)$$

accélérée depuis le repos par une différence de potentiel $\Delta V = 1 \text{ V}$:

$$1 \text{ eV} = e \Delta V = 1,60(2) \times 10^{-19} \text{ J}. \quad (3)$$

En ce qui concerne les multiples décimaux de cette unité, les préfixes habituels (kilo, méga, giga, etc.) sont employés :

$$1 \text{ keV} = 10^3 \text{ eV}, \quad 1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}, \quad 1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}, \quad \text{etc.} \quad (4)$$

À l'aide de l'équivalence énergie-masse $E_0 = m c^2$, où E_0 est l'énergie au repos, m la masse et

$$c = 2,99(7) \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5)$$

la vitesse de la lumière dans le vide (des rappels utiles de relativité restreinte sont donnés en section 1.2), on exprime généralement la masse des particules en $\text{eV} \cdot c^{-2}$. Par exemple, la masse du proton est

$$m_p = 938,27(2) \text{ MeV} \cdot c^{-2}. \quad (6)$$

1.1.2 La constante de Planck réduite et la constante de structure fine

En physique nucléaire et des particules élémentaires, la constante de Planck réduite (appelée aussi constante de Dirac)

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,05(4) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (7)$$

est très souvent retenue sous la forme

$$\hbar c = 197,32(6) \text{ MeV} \cdot \text{fm}. \quad (8)$$

Une autre quantité que nous rencontrerons fréquemment est la constante de couplage associée à l'interaction électromagnétique, α . Elle est définie en termes de la charge électrique élémentaire e , la permittivité du vide

$$\varepsilon_0 = 8,85(4) \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \quad (9)$$

et la constante $\hbar c$ introduite précédemment comme

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = 7,29(7) \times 10^{-3} = \frac{1}{137,03(5)}. \quad (10)$$

Par construction, α est sans dimension. Pour des raisons historiques, on l'appelle aussi constante de structure fine.

1.2 Rappels utiles de relativité restreinte

D'après la théorie de la relativité restreinte (principalement due à Einstein), l'énergie E et l'impulsion \mathbf{p} d'une particule de masse $m \neq 0$ et de vitesse \mathbf{v} s'écrivent

$$E = \gamma m c^2 \quad \text{et} \quad \mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad (11)$$

où

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{v}{c} < 1 \quad (12)$$

sont respectivement le facteur de Lorentz et la vitesse réduite, avec $v = |\mathbf{v}|$. Il est facile de démontrer que $c^2 p^2 = (\gamma^2 - 1) m^2 c^4$, où $p = |\mathbf{p}|$. On en déduit la relation de dispersion suivante :

$$E = E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}. \quad (13)$$

Évaluons maintenant le rapport $p/(m c)$ dans les limites non relativiste ($\beta \rightarrow 0$) et ultrarelativiste ($\beta \rightarrow 1$) :

$$\frac{p}{m c} = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \simeq \begin{cases} \beta \rightarrow 0 & \text{lorsque } \beta \rightarrow 0 \\ 1/\sqrt{1 - \beta^2} \rightarrow \infty & \text{lorsque } \beta \rightarrow 1 \end{cases}. \quad (14)$$

Il en résulte que

$$E(p) \simeq \begin{cases} m c^2 + p^2/(2m) & \text{lorsque } \beta \rightarrow 0 \\ c p & \text{lorsque } \beta \rightarrow 1 \end{cases}. \quad (15)$$

La première ligne de l'équation (15) nous enseigne deux choses. (i) Lorsque la particule est au repos ($\mathbf{v} = 0$), son énergie est

$$m c^2 = E_0. \quad (16)$$

Mais ceci aurait pu être déduit de la première des équations (11). (ii) Dans la limite non relativiste, outre l'énergie E_0 , la particule possède l'énergie

$$\frac{p^2}{2m} \simeq \frac{m v^2}{2} = E_c, \quad (17)$$

qui est l'énergie cinétique de la théorie newtonienne. La seconde ligne de l'équation (15) est la relation de dispersion (linéaire) des photons dans le vide. En effet, dans cette limite ultrarelativiste, la particule est « cinématiquement équivalente » à un photon.

2 Particules et interactions fondamentales

2.1 Les constituants fondamentaux de la matière

2.1.1 De l'atome au quark

En physique, la matière est ce qui compose tout corps ayant une réalité tangible, c'est-à-dire qui possède une masse et occupe un volume. Dans leur recherche des briques élémentaires de la matière, les physiciens ont découvert des constituants de plus en plus petits, qui l'un après l'autre se sont avérés être des systèmes composites.

À la fin du XIX^e siècle, les physiciens savaient que la matière est composée d'atomes. Cependant, l'existence d'une centaine d'éléments présentant des propriétés périodiquement récurrentes (réunis dans le tableau périodique des éléments initié par Mendeleïev) est une indication claire que les atomes, jusqu'alors supposés indivisibles, ont une structure interne.

En 1911, les expériences de Rutherford ont permis de mettre en évidence que l'atome est formé d'un noyau réunissant toute la charge positive et presque toute la masse de l'élément, la très faible masse manquante étant portée par un cortège d'électrons orbitaux dont la charge est exactement l'opposée de celle du noyau.

En 1919, Rutherford prouva que le noyau de l'atome d'hydrogène est présent dans beaucoup d'autres noyaux. Il baptisa la particule correspondante du nom de proton. Dans les années 1920, les physiciens supposaient que le noyau atomique était composé de protons et d'électrons dits nucléaires. Par exemple, le noyau d'azote-14 (^{14}N ; cette notation sera vue plus tard) contenait supposément quatorze protons et sept électrons nucléaires, auxquels venaient s'ajouter sept électrons orbitaux afin d'assurer la neutralité électrique de l'atome. Cependant, ce modèle était difficile à concilier avec la toute jeune mais très prometteuse mécanique quantique.

En 1932, Chadwick, disciple de Rutherford, découvrit le neutron comme deuxième brique élémentaire des noyaux atomiques, de masse proche de celle du proton mais de charge électrique nulle. ^{14}N n'était donc plus supposément composé de quatorze protons et sept électrons nucléaires, mais vérifiablement de sept protons et sept neutrons. Les protons et les neutrons sont collectivement appelés nucléons. Par exemple, ^{14}N en comporte quatorze.

L'électron, le proton et le neutron furent plus tard rejoints par le neutrino, qui fut théoriquement postulé en 1930 par Pauli afin de remédier à la non-conservation apparente de l'énergie et du moment cinétique au cours des désintégrations β (cette notation sera vue plus tard).

Dans les années 1950 et 1960, des expériences menées dans des accélérateurs de particules ont montré que le proton et le neutron ne sont que deux représentants d'une famille plus vaste de particules appelées hadrons. Tout comme les atomes, les hadrons sont classifiables en groupes de particules aux propriétés similaires, ce qui veut dire qu'ils sont des systèmes composites. En 1964, Gell-Mann et Zweig élaborèrent le modèle des quarks afin d'expliquer le partitionnement des hadrons : tout hadron peut être décrit comme une combinaison de deux ou trois quarks.

Ainsi, différentes échelles dans la hiérarchie structurelle de la matière peuvent être identifiées « en augmentant le grossissement », c'est-à-dire en sondant la matière avec des énergies de plus en plus élevées (voir table 1).

2.1.2 Les briques élémentaires de la matière

Les deux familles de briques fondamentales de la matière sont les leptons, qui incluent l'électron et le neutrino, et les quarks. Leur taille typique est inférieure à 10^{-3} fm (ce sont peut-être des

Atome	Formé d'un noyau et d'électrons	$\sim 10^5$ fm	~ 1 eV
Noyau	Formé de nucléons	~ 10 fm	~ 1 MeV
Nucléon	Formé de quarks	~ 1 fm	~ 1 GeV

TABLE 1 – Hiérarchie structurelle de la matière, de l'atome, formé d'un noyau et d'électrons, au nucléon, formé de quarks.

particules ponctuelles). Ce sont des fermions de spin $1/2$. Ils n'ont jamais été observés dans un état excité et sont donc considérés comme des particules élémentaires. Six leptons, six quarks et leurs antiparticules — de masses et spins égaux mais de charges opposées à ceux et celles des particules correspondantes — ont été observés.

Les six leptons incluent l'électron (e), le neutrino électronique (ν_e), le muon (μ), le neutrino muonique (ν_μ), le tauon (τ) et le neutrino tauonique (ν_τ). Les six quarks sont le up (u), le down (d), le charm (c), le strange (s), le top (t) et le bottom (b). Le positron (\bar{e}) et l'antineutrino électronique ($\bar{\nu}_e$) sont par exemple les antiparticules de l'électron et du neutrino électronique, respectivement.

Ces douze particules élémentaires se répartissent en trois générations qui ne diffèrent l'une de l'autre que par la masse, grosso modo plus élevée à chaque génération (première génération : $\{e, \nu_e, u, d\}$, deuxième génération : $\{\mu, \nu_\mu, c, s\}$, troisième génération : $\{\tau, \nu_\tau, t, b\}$). Ceci laisse penser que ces particules élémentaires ne sont peut-être pas aussi élémentaires qu'elles semblent l'être...

2.2 Les interactions fondamentales

2.2.1 Les forces électromagnétique, forte, faible et gravitationnelle

De quelle manière interagissent ces particules (et antiparticules) élémentaires? Au début du XIX^e siècle, quatre forces étaient considérées comme fondamentales : l'électricité, le magnétisme, l'ensemble des « forces chimiques » entre les atomes et les molécules et la gravitation. Aujourd'hui, nous savons (même si rien n'est absolu en physique) que les quatre interactions fondamentales sont les interactions électromagnétique, forte, faible et gravitationnelle.

À la fin du XIX^e siècle, les travaux pionniers de Maxwell ont démontré que l'électricité et le magnétisme sont la manifestation d'une seule et même force : l'électromagnétisme. Avec la découverte du noyau atomique, qui porte une charge électrique positive opposée à celle du nuage électronique de l'atome, on comprit alors que noyau et cortège électronique interagissent de manière électromagnétique. D'autre part, on montra que les champs électriques ne s'annulent pas complètement à courte distance. Ainsi, on comprit que des atomes (ou molécules) voisins les uns des autres s'influencent mutuellement via l'interaction électromagnétique, et donc que les différentes « forces chimiques » que l'on connaissait déjà (aujourd'hui identifiables aux forces de Keesom, de Debye, de London, de van der Waals de manière générale) ne sont que l'expression de l'interaction électromagnétique.

Avec le développement de la physique nucléaire, deux nouvelles forces se sont jointes au tableau : la force nucléaire, qui agit entre nucléons, et la force faible, qui se manifeste au cours des désintégrations β . De nos jours, nous savons que la force nucléaire n'est pas une interaction fondamentale. Celle-ci résulte de l'interaction forte, qui lie les quarks entre eux pour former les nucléons.

L'interaction gravitationnelle a son importance à grande échelle. Elle explique l'existence des galaxies, des étoiles, des systèmes planétaires, etc. Elle a aussi son importance dans notre vie quotidienne (attraction terrestre qui nous retient au sol, marées, assistants de navigation GPS, etc.). Elle n'a par contre aucune incidence en physique subatomique, étant bien trop faible pour influencer de manière significative l'interaction entre les douze particules élémentaires et leurs antiparticules.

2.2.2 Les bosons vecteurs et les charges électrique, forte et faible

D'après la théorie relativiste des champs quantiques (confirmée par l'expérience), les interactions fondamentales sont médiées par l'échange de bosons vecteurs (ou de jauge), qui sont des particules de spin 1. Le boson vecteur de l'électromagnétisme est le photon (γ), celui de la force forte est le gluon (g) et ceux de la force faible sont les bosons W^+ , W^- et Z^0 .

Les interactions électromagnétique, forte et faible sont associées à une charge : la charge électrique pour la première, la charge forte (ou de couleur) pour la deuxième et la charge faible pour la troisième. Une particule élémentaire est sujette à une (ou plusieurs) de ces interactions si, et seulement si, elle porte la (les) charge(s) correspondante(s) : tous les leptons sauf les neutrinos et tous les quarks portent une charge électrique ; seuls les quarks portent une charge forte ; tous les leptons et tous les quarks portent une charge faible. Par exemple, deux électrons vont pouvoir interagir électromagnétiquement en échangeant un photon car ils portent une charge électrique non nulle (égale à $-e$ en l'occurrence). De même, deux quarks vont pouvoir interagir fortement en échangeant un gluon car ils portent une charge de couleur non nulle.

2.2.3 Portée des interactions fondamentales

A priori, l'émission d'un boson de jauge $B \in \{\gamma, g, W^\pm, Z^0\}$ d'énergie $\Delta E_B \neq 0$ constitue une entrave à la conservation de l'énergie. Cependant, la relation d'incertitude de Heisenberg portant sur l'énergie et le temps (voir cours de mécanique quantique de licence) impose au surplus d'énergie ΔE_B d'avoir une durée de vie Δt_B limitée, inversement proportionnelle à ΔE_B :

$$\Delta t_B = \frac{C}{2} \frac{\hbar}{\Delta E_B}, \quad (18)$$

où C est une constante sans dimension supérieure ou égale à 1. Lorsqu'il est émis, B ne dispose donc que d'un instant pour véhiculer la force et, se déplaçant à vitesse finie, il ne peut ainsi agir que sur une distance finie qui correspond à la portée Δx_B de l'interaction. On peut évaluer cette dernière de la manière suivante :

$$\Delta x_B \sim c \Delta t_B \stackrel{(18)}{\sim} \frac{\hbar c}{\Delta E_B} \sim \frac{\hbar c}{m_B c^2} \stackrel{(8)}{=} \frac{197,32(6)}{m_B c^2 [\text{MeV}]} \text{ fm}, \quad (19)$$

où m_B est la masse de B .

Tandis que le photon et le(s) gluon(s) (pourquoi « s » ?) sont non massifs, les bosons W^\pm et Z^0 sont très lourds :

$$m_\gamma = m_g = 0 \text{ eV} \cdot c^{-2}, \quad m_{W^\pm} = 80,40(3) \text{ GeV} \cdot c^{-2} \quad \text{et} \quad m_{Z^0} = 91,18(7) \text{ GeV} \cdot c^{-2}. \quad (20)$$

D'après (19), on en déduit que l'interaction électromagnétique et l'interaction forte sont de portée infinie et que l'interaction faible est de très courte portée, de l'ordre de 10^{-3} fm. En ce qui

concerne l'interaction forte, cette conclusion est bien fautive car les gluons portent une charge de couleur (d'où le « s »...). Ils interagissent donc entre eux en échangeant des gluons, qui eux-mêmes interagissent entre eux en échangeant des gluons, etc. Ceci limite drastiquement la portée de l'interaction forte, qui est de l'ordre de 1 fm, et rend sa théorie, la chromodynamique quantique, très compliquée et mal comprise.

2.2.4 Diagrammes de Feynman

La figure 1 vaut mieux que dix-mille mots...

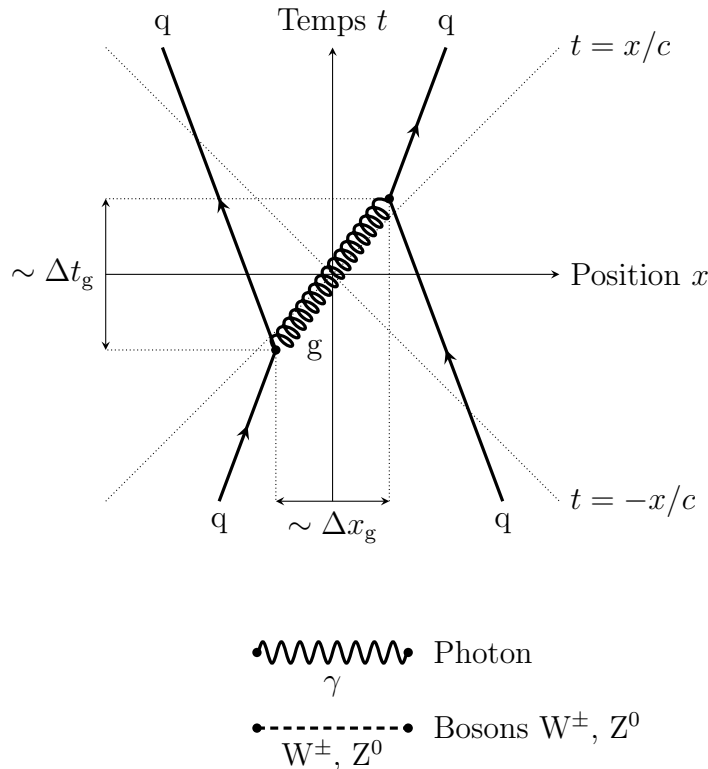


FIGURE 1 – AU DESSUS : Deux quarks q interagissent fortement en échangeant un gluon g . EN DESSOUS : Représentations du photon et des bosons W^\pm et Z^0 entre deux vertex d'interaction électromagnétique et faible, respectivement.

2.3 Le modèle standard de la physique des particules

Le modèle standard de la physique des particules est une théorie qui concerne la classification de toutes les particules élémentaires connues et de leurs interactions fondamentales. Par son succès à expliquer une grande variété de résultats expérimentaux, il est parfois vu comme une « théorie de presque tout » (quid de la gravitation, entre autres ?) (voir figure 2).

Cette théorie inclut le boson de Higgs, dont l'existence théorisée en 1964 a été confirmée en 2012 au Grand collisionneur de hadrons (LHC, pour « Large hadron collider ») de l'Organisation européenne pour la recherche nucléaire (CERN). Ce boson très massif ne véhicule aucune interaction (c'est un boson scalaire) mais permet d'expliquer pourquoi certaines particules ont une masse et d'autres n'en ont pas (mécanisme de brisure spontanée de la symétrie de l'interaction unifiée

électrofaible dû à Brout, Englert, Higgs, Hagen, Guralnik et Kibble, dit mécanisme BEHHGK et prononcé « Beck »).

		Fermions (matière)			Bosons vecteurs (interactions)		
Masse (MeV · c ⁻²)	Charge électrique (e)	Spin	e	μ	τ	γ	H
			0,5(1)	1,0(5) × 10 ²	1,7(7) × 10 ³	0	
			-1	-1	-1	0	0
			1/2	1/2	1/2	1	0
Leptons			ν_e	ν_μ	ν_τ	g	
			< 2,0(5) × 10 ⁻⁶	< 0,1(9)	< 18,2(0)	0	
			0	0	0	0	
			1/2	1/2	1/2	1	
Quarks			u	c	t	W[±]	
			2,4(0)	1,2(7) × 10 ³	1,7(3) × 10 ⁵	8,0(4) × 10 ⁴	
			2/3	2/3	2/3	±1	
			1/2	1/2	1/2	1	
			d	s	b	Z⁰	
			5,0(0)	95,0(0)	4,1(8) × 10 ³	9,1(1) × 10 ⁴	
			-1/3	-1/3	-1/3	0	
			1/2	1/2	1/2	1	
			Première génération	Deuxième génération	Troisième génération		

FIGURE 2 – Le modèle standard de la physique des particules. Des informations concernant la masse, la charge électrique et le spin des particules sont données [voir, par exemple, Juerg Beringer et coll. (Particle data group), « Review of particle physics », *Physical review D*, volume 86, page 010001 (2012), sauf pour le boson de Higgs].

2.4 Expériences

Les expériences de physique subatomique s’effectuent essentiellement à l’aide d’accélérateurs de particules. La construction d’accélérateurs de plus en plus puissants, permettant de produire des faisceaux de particules de plus en plus énergétiques, a permis de découvrir de plus en plus de particules élémentaires.

On distingue deux grands types d’expérience : les expériences de diffusion et celles de spectroscopie. Dans les expériences de diffusion, un faisceau de particules dont l’énergie et l’impulsion sont connues est dirigé vers un objet qu’on souhaite étudier (la cible). Les particules du faisceau interagissent avec l’objet et leur cinématique s’en trouve ainsi modifiée. Ceci permet de sonder les propriétés de la cible ainsi que celles de l’interaction entre le faisceau et la cible. En spectroscopie, on s’attache à extraire l’information contenue dans les rayonnements produits au cours de désexcitations nucléaires et/ou particulaires.

Les particules chargées interagissent avec les gaz, les liquides, les solides amorphes et les cristaux. Ces interactions produisent des signaux électriques ou optiques qui trahissent le passage de

ces particules dans ces matériaux. Les particules neutres sont indirectement détectées grâce aux particules secondaires, chargées, qu'elles produisent par interaction avec leur environnement. Par exemple, les photons produisent des électrons libres par effet photoélectrique ; les neutrons produisent des protons et des électrons par interaction avec les noyaux atomiques.

3 Masse et stabilité des noyaux

3.1 Propriétés générales des noyaux

3.1.1 Le nombre de masse et le numéro atomique

Le nombre de masse A et le numéro atomique Z d'un noyau donnent respectivement son nombre de nucléons et son nombre de protons. Son nombre de neutrons N se calcule donc de la manière suivante :

$$N = A - Z. \quad (21)$$

Un noyau de symbole X comportant A nucléons, Z protons et N neutrons est noté A_ZX_N . On omet fréquemment d'indiquer le nombre de neutrons puisque celui-ci se déduit facilement de la soustraction (21). Ainsi, le noyau est plus simplement noté

$${}^A_ZX \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} X, \text{ le symbole de l'élément chimique,} \\ A, \text{ le nombre de masse, et} \\ Z, \text{ le numéro atomique.} \end{array} \quad (22)$$

Lorsqu'il n'est pas important de spécifier le numéro atomique, on écrit encore plus simplement AX . Par exemple, le noyau d'azote-14 est noté ${}^{14}_7\text{N}$ (« N » pour « nitrogène », ancienne désignation de l'azote due à Lavoisier). Celui-ci possède quatorze nucléons et sept protons (et donc sept neutrons). On le note parfois plus simplement ${}^{14}\text{N}$.

Le numéro atomique d'un noyau détermine les propriétés chimiques de l'élément correspondant. Le proton porte la charge électrique e et le neutron est électriquement neutre. Il en résulte que la charge électrique du noyau vaut Ze et donc que celle du cortège électronique de l'atome correspondant est égale à $-Ze$. Deux nucléides avec le même nombre de masse (respectivement le même numéro atomique, respectivement le même nombre de neutrons) sont appelés isobares (respectivement isotopes, respectivement isotones). Par exemple, le francium-223 (${}^{223}_{87}\text{Fr}$) et le radium-223 (${}^{223}_{88}\text{Ra}$) sont deux isobares ; le thorium-228 (${}^{228}_{90}\text{Th}$) et le thorium-232 (${}^{232}_{90}\text{Th}$) sont deux isotopes ; le carbone-13 (${}^{13}_6\text{C}$) et l'azote-14 (${}^{14}_7\text{N}$) sont deux isotones. À la lumière du deuxième exemple, on comprend immédiatement qu'il est important d'adosser le nombre de masse au nom du noyau afin de distinguer les isotopes d'un même élément chimique.

3.1.2 L'énergie de liaison nucléaire et la masse atomique

L'énergie de liaison d'un noyau A_ZX , très souvent notée $B(A, Z)$ (« B » pour « binding energy » en anglais), est l'énergie qu'il faut lui fournir pour le dissocier depuis le repos en ses nucléons. Celle-ci est donc identifiable à la différence entre la somme des masses de ses nucléons pris individuellement et sa masse réelle $m(A, Z)$:

$$B(A, Z) = [Z m_p + (A - Z) m_n - m(A, Z)] c^2, \quad (23)$$

où

$$m_p = 938,27(2) \text{ MeV} \cdot c^{-2} \quad \text{et} \quad m_n = 939,56(5) \text{ MeV} \cdot c^{-2} \quad (24)$$

sont respectivement la masse du proton et celle du neutron. On déduit de l'équation (23) que la masse $M(A, Z) = m(A, Z) + Z m_e$ de l'atome correspondant s'écrit

$$M(A, Z) = Z(m_p + m_e) + (A - Z)m_n - \frac{B(A, Z)}{c^2}, \quad (25)$$

où

$$m_e = 0,51(1) \text{ MeV} \cdot c^{-2} \quad (26)$$

est la masse de l'électron.

En comparant les masses (24) et (26), on constate que l'électron est presque deux mille fois moins massif qu'un nucléon. Par conséquent, on peut sans trop faire d'erreur négliger la masse $Z m_e$ du cortège électronique dans l'équation (25). Ceci montre que quasiment toute la masse de l'atome est portée par son noyau. D'autre part, le terme $B(A, Z)/c^2$ d'énergie de liaison ne représente en pratique que quelques pourcents de la masse nucléonique. Dès lors, il peut lui aussi être négligé dans cette même équation. On remarque enfin que $m_p \simeq m_n \simeq 940 \text{ MeV} \cdot c^{-2} = m_N$, valeur qu'on peut utiliser comme ordre de grandeur de la masse d'un nucléon. Ainsi, étant données ces approximations (légitimes mais parfois trop grossières pour certains calculs), la masse molaire $\mathcal{M}(A) = M(A, Z) \mathcal{N}_A$ d'un atome possédant A nucléons ne dépend pas du numéro atomique Z et se calcule comme suit :

$$\mathcal{M}(A) \simeq A \times m_N \times \mathcal{N}_A \quad (27a)$$

$$\stackrel{(3),(5)}{=} A \times \left\{ \frac{940 \times 10^6 \times 1,60(2) \times 10^{-19}}{[2,99(7) \times 10^8]^2} \times 10^3 \text{ g} \right\} \times [6,02(2) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}] \quad (27b)$$

$$\mathcal{M}(A) \simeq A \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}, \quad (27c)$$

où on a introduit le nombre d'Avogadro \mathcal{N}_A . Ainsi, le nombre de masse d'un noyau atomique donne à peu près la valeur de la masse molaire de l'élément en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ (d'où la dénomination « nombre de masse »). Par exemple, la masse molaire de l'uranium-238 est de $238 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ environ.

3.2 Mesurer l'énergie de liaison nucléaire

3.2.1 Spectrométrie de masse

L'énergie de liaison $B(A, Z)$ d'un noyau ${}^A_Z X$ peut se déduire de l'équation (25) si la masse $M(A, Z)$ de l'atome correspondant est connue avec précision. Apparue au début du XX^e siècle, la spectrométrie de masse est une technique permettant de déterminer les masses atomiques. L'élément chimique en question est préparé en phase gazeuse puis ionisé (disons $z \in \mathbb{Z}$ fois). La déflexion d'un ion de charge $z e$ et de masse $M(A, Z) - z m_e$ par des champs électrique et magnétique uniformes \mathbf{E} et \mathbf{B} perpendiculaires au plan de sa trajectoire permet la mesure simultanée de son énergie cinétique E_c et de son impulsion p , de laquelle on tire la valeur de $M(A, Z)$:

$$E_c = \frac{|z| e |\mathbf{E}| R_{\mathbf{E}}}{2} \quad \text{et} \quad p = |z| e |\mathbf{B}| R_{\mathbf{B}}, \quad \text{d'où} \quad M(A, Z) = z m_e + \frac{p^2}{2 E_c}, \quad (28)$$

où $R_{\mathbf{E}}$ et $R_{\mathbf{B}}$ sont les rayons de courbure de la trajectoire de l'ion dans les secteurs électrique et magnétique, respectivement (voir cours d'électromagnétisme de licence).

Notons que les énergies de liaison des noyaux peuvent aussi se déduire d'études systématiques de réactions nucléaires.

3.2.2 La courbe d'Aston

Mis à part les éléments les plus légers de la table périodique de Mendeleïev, $B(A, Z)/A$, l'énergie de liaison par nucléon d'un noyau comportant A nucléons et Z protons, est grosso modo comprise entre 7 et 9 MeV. La courbe d'Aston, présentée à la figure 3, reporte $B(A, Z)/A$ en fonction de A .

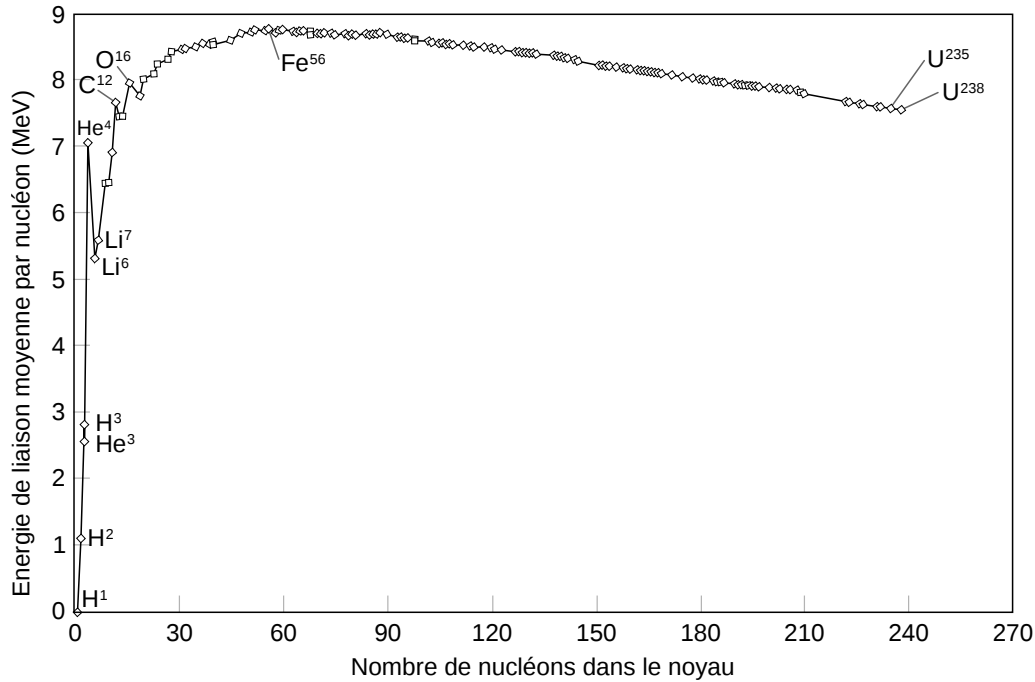


FIGURE 3 – La courbe d'Aston. Celle-ci reporte l'énergie de liaison nucléaire par nucléon $B(A, Z)/A$ en fonction du nombre de masse A . Les positions de quelques noyaux comme ceux de carbone-12, de fer-56 et d'uranium-235 sont indiquées.

3.3 La formule de Bethe-Weizsäcker

3.3.1 Expression

Une paramétrisation phénoménologique de l'énergie de liaison $B(A, Z)$ d'un noyau A_ZX en fonction de son nombre de masse A et de son numéro atomique Z a été introduite en 1935 par Bethe et (von) Weizsäcker. L'équation correspondante porte le nom de formule de Bethe-Weizsäcker ou de formule semi-empirique de la masse et s'écrit

$$B(A, Z) = B_v - B_s - B_C - B_a + B_p, \quad \text{où} \quad \begin{cases} B_v = b_v A \\ B_s = b_s A^{2/3} \\ B_C = b_C A^{-1/3} Z(Z-1) \\ B_a = b_a A^{-1} (A-2Z)^2 \\ B_p = b_p A^{-a_p} \end{cases} \quad (29)$$

Les paramètres $b_v > 0$, $b_s > 0$, $b_C > 0$, $b_a > 0$, $b_p > 0$ (ou bien $b_p = 0$, ou bien $b_p < 0$) et $a_p > 0$ sont choisis de sorte que la formule de Bethe-Weizsäcker (29) divisée par A ajuste au mieux la

courbe d'Aston présentée à la figure 3 (au moins dans l'intervalle de nombres de masse auquel on s'intéresse et au mieux pour toutes les abscisses de la courbe). Un jeu de paramètres possible est donné ci-dessous [voir, par exemple, James W. Rohlf, *Modern physics from α to Z^0* (Wiley, 1994)] :

$$b_v = 15,75 \text{ MeV}, \quad (30)$$

$$b_s = 17,8 \text{ MeV}, \quad (31)$$

$$b_C = 0,711 \text{ MeV}, \quad (32)$$

$$b_a = 23,7 \text{ MeV}, \quad (33)$$

$$b_p = \begin{cases} 11,18 \text{ MeV} & \text{lorsque } Z \text{ et } N \text{ sont pairs} \\ 0 \text{ eV} & \text{lorsque } Z \text{ et } N \text{ sont de parités différentes} \\ -11,18 \text{ MeV} & \text{lorsque } Z \text{ et } N \text{ sont impairs} \end{cases} \quad \text{et} \quad (34)$$

$$a_p = 1/2. \quad (35)$$

3.3.2 L'énergie de volume B_v

Pour expliquer la contribution B_v à l'équation (29), on assimile le noyau à un gaz parfait classique de A particules identiques et B_v à l'énergie interne de ce gaz, qui est, d'après le cours de mécanique statistique de licence, proportionnelle à A : $B_v \propto A$.

3.3.3 L'énergie de surface B_s

Intuitivement, les nucléons à la surface du noyau sont en contact avec moins de nucléons que ceux de l'intérieur. L'énergie de liaison du noyau s'en trouve donc diminuée, de la même manière que l'énergie de cohésion moléculaire d'une goutte liquide entourée d'un gaz est amoindrie par la tension superficielle à l'interface liquide-gaz. Assimilons donc le noyau à une goutte liquide sphérique de rayon r contenant A particules et la contribution B_s à l'équation (29) à l'énergie de tension superficielle à l'interface entre la goutte et son environnement. Cette dernière est proportionnelle à la surface de la goutte, c'est-à-dire à r^2 . Or, le volume de la goutte est à la fois proportionnel à r^3 et A , donc $r \propto A^{1/3}$, d'où $B_s \propto A^{2/3}$.

3.3.4 L'énergie de Coulomb B_C

De charge électrique $e > 0$, les Z protons du noyau se repoussent mutuellement par interaction coulombienne, ce qui participe à diminuer l'énergie de liaison nucléaire. Pour décrire un peu mieux $B(A, Z)$, on doit donc soustraire à $B_v - B_s$ l'énergie potentielle de la distribution de charge électrique du noyau, B_C . Si les protons se répartissent uniformément dans une boule de rayon r (on reprend le modèle de la goutte liquide de la section 3.3.3), on a

$$B_C \propto \sum_{(Z \text{ protons})} \frac{e \times \sum_{(Z-1 \text{ protons})} e}{r} \propto \frac{Z(Z-1)}{r}. \quad (36)$$

Or, $r \propto A^{1/3}$, d'où $B_C \propto A^{-1/3} Z(Z-1)$.

3.3.5 L'énergie d'asymétrie B_a

La contribution B_a à la formule de Bethe-Weizsäcker est d'origine quantique et s'explique comme suit. Tout d'abord, deux protons (ou deux neutrons) ne peuvent occuper le même état

quantique au même instant car ce sont des fermions ; c'est le célèbre « principe » d'exclusion de Pauli (voir cours de mécanique quantique de licence). Le nombre d'occupation des états quantiques à un proton (ou à un neutron) est donc au maximum égal à un. D'autre part, un proton et un neutron ne peuvent occuper le même état quantique car ce sont deux particules distinctes (voir, de même, cours de mécanique quantique de licence). À la lumière de ce qui précède, on comprend donc qu'il se peut que quelques protons (ou quelques neutrons) soient plus énergétiques que quelques états quantiques à un neutron (ou à un proton) vacants. S'il était possible de « convertir » ces protons (ou ces neutrons) en neutrons (ou en protons), on pourrait donc réduire l'énergie de masse du noyau, c'est-à-dire accroître son énergie de liaison, mais ce n'est pas le cas car protons et neutrons ne sont pas identiques. À nombre de nucléons fixé, le déséquilibre — l'asymétrie — numérique entre protons et neutrons fait que l'énergie de masse du noyau est plus grande que nécessaire, diminuant d'un terme U son énergie de liaison.

Assimilons U à l'énergie interne d'un gaz parfait fermionique non thermique à deux composantes. La composante protonique (respectivement neutronique) comporte Z (respectivement N) particules. On a (voir cours de mécanique statistique de licence)

$$U = \frac{3}{5} [Z (E_F)_p + N (E_F)_n], \quad (37)$$

où les énergies de Fermi $(E_F)_p$ et $(E_F)_n$ des composantes protonique et neutronique s'écrivent (V est le volume du « gaz nucléaire »)

$$(E_F)_p = \frac{\hbar^2}{2m_p} \left(\frac{3\pi^2 Z}{V} \right)^{2/3} \quad \text{et} \quad (E_F)_n = \frac{\hbar^2}{2m_n} \left(\frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{2/3}. \quad (38)$$

En approximant les masses m_p et m_n par m_N , en effectuant un développement limité de U au deuxième ordre en $|Z - N|/(Z + N) \ll 1$ et en tirant parti de l'équation (21), on obtient successivement

$$U \simeq \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{2/3} (Z^{5/3} + N^{5/3}) \quad (39a)$$

$$\simeq \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{2/3} \frac{(Z + N)^{5/3}}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{Z - N}{Z + N} \right)^2 \right] \quad (39b)$$

$$= \frac{3}{5} \frac{\hbar^2}{2m_N} \left(\frac{3\pi^2}{V} \right)^{2/3} \frac{A^{5/3}}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{A - 2Z}{A} \right)^2 \right]. \quad (39c)$$

Or, $V \propto A$, donc $A^{5/3}/V^{2/3} \propto A$, d'où, en distribuant,

$$U \propto A + \frac{5}{9} \frac{(A - 2Z)^2}{A}. \quad (40)$$

Le premier terme contribue à l'énergie de volume B_v car il est proportionnel à A . Le second est l'énergie d'asymétrie que nous recherchons : $B_a \propto A^{-1} (A - 2Z)^2$.

3.3.6 L'énergie d'appariement B_p

La contribution B_p à l'équation (29) est aussi d'origine quantique. Elle rend compte de l'appariement (« pairing » en anglais, d'où l'indice « p ») des spins 1/2 des nucléons. On note $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$

leurs états de spin individuels (notations standards du cours de mécanique quantique de licence). Un proton (respectivement un neutron) d'état $|\uparrow\rangle$ (ou $|\downarrow\rangle$) a tendance à s'apparier avec un proton (respectivement un neutron) d'état $|\downarrow\rangle$ (ou $|\uparrow\rangle$). Le nombre de protons et le nombre de neutrons doivent donc être préférentiellement pairs pour maximiser l'énergie de liaison du noyau. S'ils sont tous deux impairs, l'énergie de liaison s'en trouve au contraire diminuée. Un noyau « pair-pair » est donc plus stable qu'un noyau « impair-impair ». Les noyaux « pair-impair » et « impair-pair » sont dans un entre-deux. Leur énergie de liaison n'est pas affectée par l'appariement de spin. La loi de puissance $B_p \propto A^{-a_p}$ n'est par contre pas du tout triviale à expliquer...

3.4 Stabilité des noyaux

3.4.1 L'équation de la vallée de stabilité

L'énergie de liaison nucléaire telle que donnée par la formule de Bethe-Weizsäcker (29) est un polynôme du second degré du numéro atomique :

$$B(A, Z) = -(b_C A^{-1/3} + 4b_a A^{-1}) \times Z^2 + (b_C A^{-1/3} + 4b_a) \times Z + (b_v - b_a) A - b_s A^{2/3} + b_p A^{-a_p}. \quad (41)$$

Au sein d'un groupe d'isobares de nombre de masse A donné, le plus stable est celui qui a la plus grande énergie de liaison $B(A, Z)$, c'est-à-dire celui dont le numéro atomique Z_{stable} est tel que $(\partial B/\partial Z)(A, Z_{\text{stable}}) = 0$ et $(\partial^2 B/\partial Z^2)(A, Z_{\text{stable}}) < 0$, soit, d'après l'équation (41),

$$Z_{\text{stable}} = \frac{A}{2} \frac{1 + \frac{b_C}{4b_a} A^{-1/3}}{1 + \frac{b_C}{4b_a} A^{2/3}} = \frac{Z_{\text{stable}} + N_{\text{stable}}}{2} \frac{1 + \frac{b_C}{4b_a} (Z_{\text{stable}} + N_{\text{stable}})^{-1/3}}{1 + \frac{b_C}{4b_a} (Z_{\text{stable}} + N_{\text{stable}})^{2/3}}, \quad (42)$$

où l'on a tiré parti de l'équation (21). L'équation (42) est connue sous le nom d'équation de la vallée de stabilité : sur un diagramme $\{Z, N\}$ reportant le nombre de neutrons en fonction du nombre de protons, les noyaux répartis autour de la courbe d'équation (42) sont stables (ils sont indiqués en noir à la figure 4).

En règle générale, un noyau est d'autant plus instable, et donc d'autant plus radioactif, qu'il est éloigné de la vallée de stabilité. Un noyau lourd, pour lequel à la fois Z et N sont grands, se désintègre généralement en émettant un nucléide d'hélium-4 (${}^4_2\text{He}$). C'est la radioactivité α . Le point représentatif du noyau se déplace donc vers la vallée de stabilité de deux cases le long de l'antidiagonale du diagramme $\{Z, N\}$. Un noyau qui présente un excès de neutrons (respectivement de protons) par rapport aux noyaux stables de même nombre de masse est situé au-dessus (respectivement en-dessous) de la vallée de stabilité. Ce noyau est l'objet d'une radioactivité β^- (respectivement β^+) : un neutron (respectivement un proton) est converti en proton (respectivement en neutron), expulsant du noyau un électron et un antineutrino électronique (respectivement un positron et un neutrino électronique). Le point représentatif du noyau se déplace donc vers la vallée de stabilité d'une case le long de la diagonale du diagramme $\{Z, N\}$. Nous détaillons cela en sections 3.4.2, 3.4.3 et 3.4.4. Pour des déséquilibres numériques plus importants, d'autres formes de radioactivité peuvent apparaître : les noyaux fortement déficitaires en protons peuvent émettre un neutron, et inversement, les noyaux fortement déficitaires en neutrons peuvent émettre un proton.

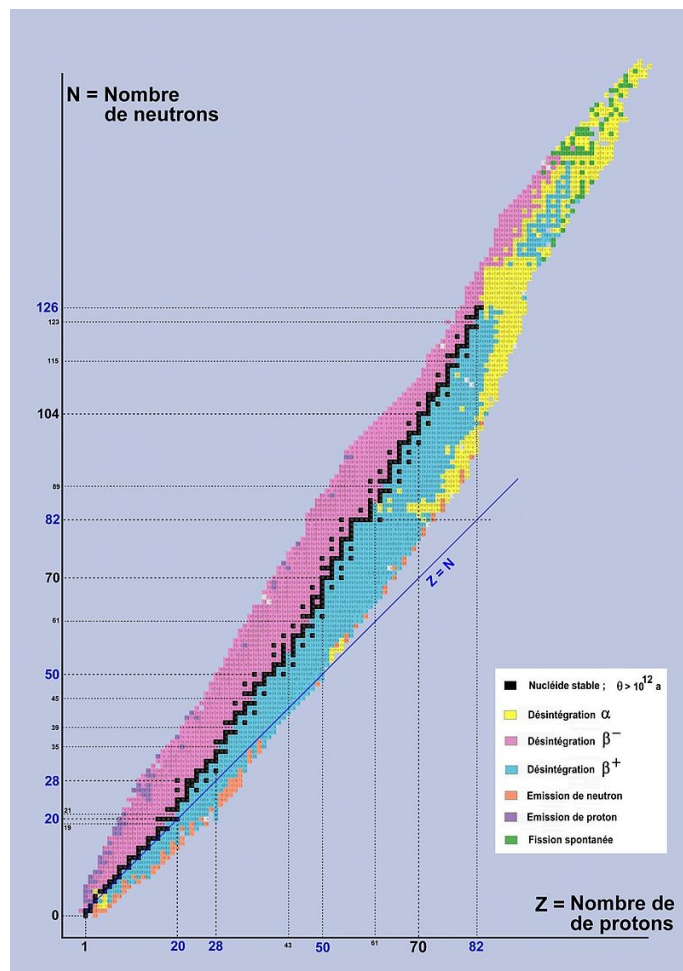
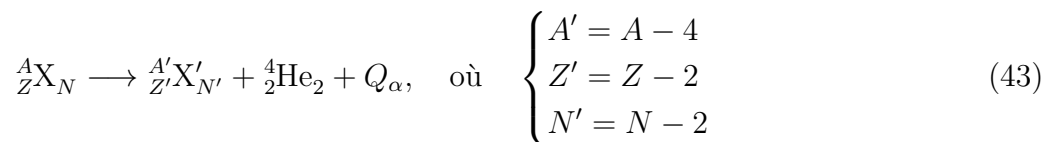


FIGURE 4 – Les noyaux stables sont ceux dont la position est indiquée en noir. Ils se répartissent autour de la courbe d'équation (42), dite équation de la vallée de stabilité. Les noyaux dont la position est indiquée en jaune (respectivement en magenta, respectivement en cyan) sont radioactifs α (respectivement β^- , respectivement β^+).

3.4.2 La radioactivité α

Un noyau-père instable ${}^A_Z X_N$ se désintègre spontanément en un noyau-fils plus stable ${}^{A'}_{Z'} X'_{N'}$ par radioactivité α lorsqu'il expulse un noyau d'hélium-4 ${}^4_2 \text{He}_2$ — dit particule α :



et Q_α est l'énergie de désintégration α , qui se déduit de la conservation de la masse :

$$Q_\alpha = m(A, Z) c^2 - m(A', Z') c^2 - m(4, 2) c^2 \quad (44a)$$

$$\stackrel{(23), (43)}{=} B(A', Z') - B(A, Z) + B(4, 2). \quad (44b)$$

Sur le diagramme $\{Z, N\}$ de la section 3.4.1, une désintégration α est donc associée à un déplacement de deux cases vers la gauche et de deux cases vers le bas (voir figure 5). L'uranium-238 est

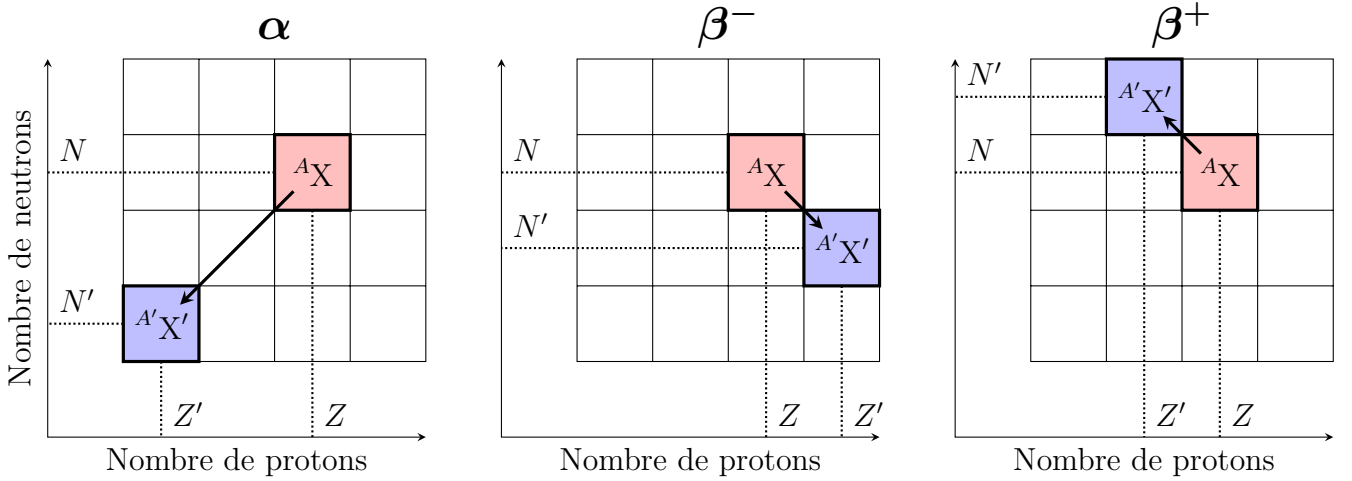
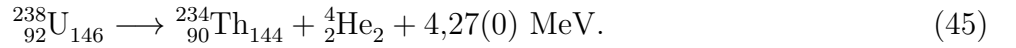


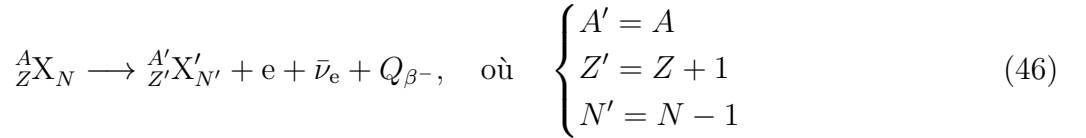
FIGURE 5 – Représentation schématique des radioactivités α , β^- et β^+ sur un diagramme reportant le nombre de neutrons en fonction du nombre de protons (voir texte).

un exemple de radioactif α ; il se désintègre en thorium-234 en libérant 4,27(0) MeV d'énergie :



3.4.3 La radioactivité β^-

Un noyau-père instable A_ZX_N se désintègre spontanément en un noyau-fils plus stable ${}^{A'}_{Z'}X'_{N'}$ par radioactivité β^- lorsqu'il expulse un électron e^- — dit particule β^- — et un antineutrino électronique $\bar{\nu}_e$:

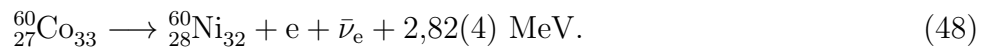


et Q_{β^-} est l'énergie de désintégration β^- , qui se déduit de la conservation de la masse :

$$Q_{\beta^-} = m(A, Z) c^2 - m(A', Z') c^2 - m_e c^2 - m_{\nu_e} c^2 \quad (47a)$$

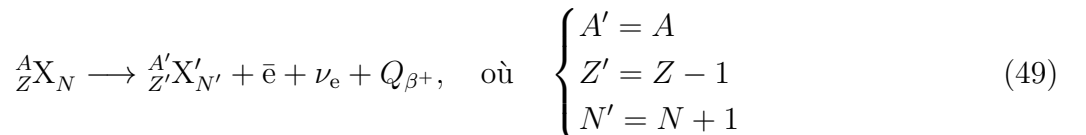
$$\stackrel{(23), (46)}{=} B(A', Z') - B(A, Z) - m_p c^2 + m_n c^2 - m_e c^2 - m_{\nu_e} c^2. \quad (47b)$$

Sur le diagramme $\{Z, N\}$ de la section 3.4.1, une désintégration β^- est donc associée à un déplacement d'une case vers la droite et d'une case vers le bas (voir figure 5). Le cobalt-60 est un exemple de radioactif β^- ; il se désintègre en nickel-60 en libérant 2,82(4) MeV d'énergie :



3.4.4 La radioactivité β^+

Un noyau-père instable A_ZX_N se désintègre spontanément en un noyau-fils plus stable ${}^{A'}_{Z'}X'_{N'}$ par radioactivité β^+ lorsqu'il expulse un positron e^+ — dit particule β^+ — et un neutrino électronique ν_e :



et Q_{β^+} est l'énergie de désintégration β^+ , qui se déduit de la conservation de la masse :

$$Q_{\beta^+} = m(A, Z) c^2 - m(A', Z') c^2 - m_e c^2 - m_{\nu_e} c^2 \quad (50a)$$

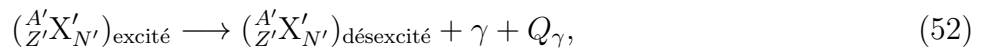
$$\stackrel{(23),(49)}{=} B(A', Z') - B(A, Z) + m_p c^2 - m_n c^2 - m_e c^2 - m_{\nu_e} c^2. \quad (50b)$$

Sur le diagramme $\{Z, N\}$ de la section 3.4.1, une désintégration β^+ est donc associée à un déplacement d'une case vers la gauche et d'une case vers le haut (voir figure 5). Le fluor-18 est un exemple de radioactif β^+ ; il se désintègre en oxygène-18 en libérant 1,65(6) MeV d'énergie :



3.4.5 La radioactivité γ

Suite à une désintégration spontanée α ou β^\pm (ou bien à une fission spontanée pour les noyaux très lourds), les nucléides produits sont le plus souvent dans un état excité, instable. La radioactivité γ se traduit par l'émission d'un rayonnement électromagnétique de très grande énergie et donc de très courte longueur d'onde (typiquement inférieure à un picomètre) appelé rayonnement γ :



où Q_γ est l'énergie produite au cours de la désexcitation.

3.4.6 La loi de décroissance radioactive

Prenons un échantillon contenant un nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs à un instant t . Entre deux instants proches t et $t + \delta t > t$, il est logique d'affirmer que le nombre $N(t) - N(t + \delta t)$ de noyaux qui se sont désintégrés est proportionnellement d'autant plus grand que $N(t)$ et δt sont grands. On écrit donc

$$N(t) - N(t + \delta t) = \lambda N(t) \delta t, \quad (53)$$

où λ est une constante de proportionnalité positive et homogène à l'inverse d'un temps appelée constante de désintégration (ou constante radioactive). Si on divise l'équation (53) par δt et qu'on fait formellement tendre δt vers zéro, on obtient l'équation différentielle du première ordre

$$\frac{dN}{dt}(t) + \lambda N(t) = 0, \quad (54)$$

dont la solution est une exponentielle décroissante :

$$N(t) = N(0) e^{-\lambda t}. \quad (55)$$

Cette équation est connue sous le nom de loi de décroissance (ou de désintégration) radioactive. Elle ne dépend ni de la nature physicochimique du radionucléide considéré, ni de son processus de désintégration. C'est une loi purement statistique.

On note τ et appelle constante de temps (ou temps de vie) l'inverse de la constante de désintégration :

$$\tau = \frac{1}{\lambda}. \quad (56)$$

Graphiquement, τ correspond à l'intersection de la tangente à la courbe d'équation (55) en $t = 0$ avec l'axe des abscisses. On note $t_{1/2}$ et appelle période radioactive (ou temps de demi-vie) la durée

au bout de laquelle la population initiale de noyaux radioactifs est réduite de moitié, c'est-à-dire l'instant tel que $N(t_{1/2}) = N(0)/2$, soit, d'après (55),

$$t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \stackrel{(56)}{=} \ln(2) \tau. \quad (57)$$

On utilise aussi souvent ce que l'on appelle l'activité radioactive

$$A(t) = -\frac{dN}{dt}(t) \stackrel{(54),(55)}{=} \lambda N(0) e^{-\lambda t} \stackrel{(56)}{=} \frac{N(0)}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad (58)$$

mesurée en becquerel, de symbole Bq ($1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$). Au bout de $n \gg 1$ périodes radioactives $t_{1/2}$, l'activité radioactive de l'échantillon est fortement diminuée : $A(n t_{1/2}) = A(0)/2^n \ll A(0)$.

4 Collisions et désintégrations

4.1 Section efficace et section efficace différentielle de collision

4.1.1 Définitions

Dans une expérience typique de physique nucléaire (voir section 2.4), on envoie un faisceau de particules dont on connaît les propriétés sur une cible dont on ne connaît presque rien. Les produits de réaction entre les particules du faisceau et les noyaux de la cible permettent d'en savoir un peu plus sur les propriétés de la cible et de l'interaction faisceau-cible. Ces produits peuvent être quelques particules du faisceau déviées de leur trajectoire initiale après être entrées en collision avec les noyaux de la cible (diffusion), ou bien les fruits de la désintégration de ces derniers au contact des particules du faisceau (fission), ou bien d'autres choses.

Considérons la configuration schématique de la figure 6. On se place en régime stationnaire. Un faisceau de particules ponctuelles homogène et monocinétique de densité volumique n_f , de vitesse v , de section transverse S et de flux Φ à travers cette surface frappe perpendiculairement une cible homogène de densité volumique n_c et d'épaisseur e . On note

$$j = n_f v = \frac{\Phi}{S} \quad (59)$$

la densité de courant de particules du faisceau et

$$N_c = n_c e S \quad (60)$$

le nombre de noyaux de la cible « éclairés » par le faisceau. Si ces derniers « ne se font pas d'ombre » et si les particules du faisceau n'entrent individuellement en collision qu'avec l'un d'entre eux, il est naturel d'affirmer que le nombre de collisions par unité de temps, dN/dt , est proportionnellement d'autant plus grand que j et N_c sont grands. On écrit donc $dN/dt = \sigma j N_c$, où σ est une constante de proportionnalité positive et homogène à une surface appelée section efficace de collision. Physiquement, elle correspond à l'aire que présente un noyau-cible à une particule du faisceau, d'où son nom. Son expression en fonction de j , N_c et dN/dt se déduit très simplement de la formule précédente :

$$\sigma = \frac{1}{j N_c} \frac{dN}{dt}, \quad (61)$$

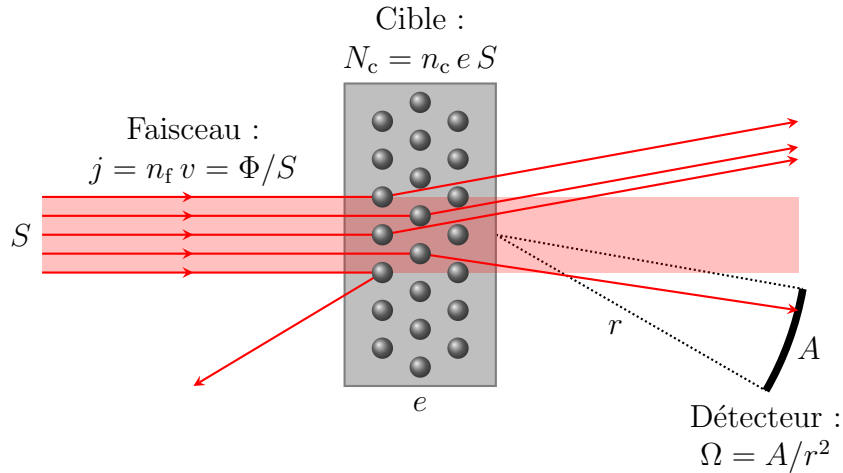


FIGURE 6 – On se place en régime stationnaire. Un faisceau de particules ponctuelles homogène et monocinétique frappe perpendiculairement une cible homogène. Les particules du faisceau entrent en collision avec les noyaux de la cible et sont déviées de leur trajectoire initiale, produisent des fissions nucléaires, ou bien d’autres choses. Un détecteur enregistre les évènements.

où $1/(j N_c)$ se calcule à l’aide des équations (59) et (60). Une section efficace de collision s’exprime dans le SI en m^2 , ou parfois en cm^2 . Par exemple, la section efficace de collision associée à la diffusion $(p + p)_{10 \text{ GeV}} \rightarrow p + p$ (on parle alors de section efficace de diffusion) est de l’ordre de 10^{-30} m^2 . On utilise aussi le barn, de symbole b, et ses sous-multiples décimaux comme unités des sections efficaces de collision :

$$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2, \quad 1 \text{ mb} = 10^{-3} \text{ b} = 10^{-31} \text{ m}^2, \quad \text{etc.} \quad (62)$$

En pratique, seulement une fraction des produits de collision est mesurée car la surface A du détecteur situé à une distance r du point d’émergence du faisceau couvre un angle solide

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \quad (63)$$

plus petit que $4\pi \text{ sr}$ (« stéradians »), qui est l’angle solide couvert par la surface de la sphère de rayon r . Le nombre d’évènements détectés par unité de temps correspond donc à l’intégrale $\int_{\text{détecteur}} d^2\Omega d^3N/(dt d^2\Omega)$, où $d^3N/(dt d^2\Omega)$ est le nombre de collisions par unité de temps et par unité d’angle solide. Tout comme dN/dt , $d^3N/(dt d^2\Omega)$ est proportionnellement d’autant plus grand que j et N_c sont grands, le facteur de proportionnalité s’écrivant ici (on effectue le même raisonnement que précédemment)

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{1}{j N_c} \frac{d^3N}{dt d^2\Omega}. \quad (64)$$

Cette quantité est la section efficace différentielle de collision. Elle s’exprime en $\text{m}^2 \cdot \text{sr}^{-1}$ ou en $\text{b} \cdot \text{sr}^{-1}$. Puisque le taux de collision mesuré sur toute la sphère de rayon r est dN/dt , il est clair que l’intégrale de la section efficace différentielle de collision sur cette sphère est égale à la section efficace de collision :

$$\sigma = \int d^2\Omega \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}. \quad (65)$$

La section efficace différentielle de collision est une fonction des points de la sphère de rayon r . Dans le repère cartésien orthonormé $(Oxyz)$ de la figure 7, ces derniers peuvent être repérés par leurs coordonnées sphériques θ et φ , où $\theta \in [0, \pi]$ est la colatitute par rapport à l'axe (Oz) et $\varphi \in [0, 2\pi)$ la longitude par rapport à l'axe (Ox) . Avec ce choix de paramétrisation, l'angle solide élémentaire $d^2\Omega$ s'écrit

$$d^2\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (66)$$

et par exemple, (65) se formule plus explicitement comme suit :

$$\sigma = \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta, \varphi). \quad (67)$$

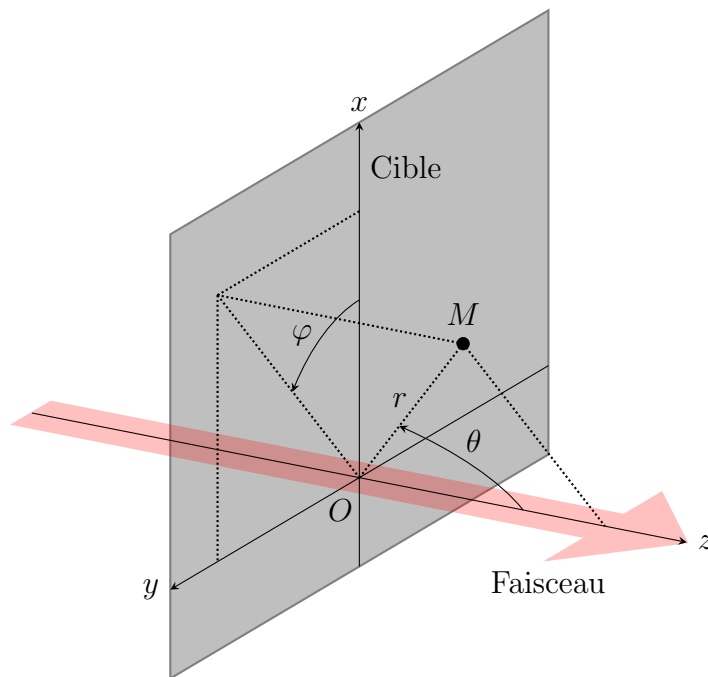


FIGURE 7 – Coordonnées sphériques $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi)$ d'un point M de l'espace. Le plan (Oxy) est celui de la cible et l'axe (Oz) est celui du faisceau.

4.1.2 Exemples : les sections efficaces différentielles de Rutherford et de Mott

La section efficace différentielle de Rutherford

On considère une particule ponctuelle de masse m , d'impulsion \mathbf{p} (p est sa norme), d'énergie $E(p) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$, de charge électrique $z e$ ($z \in \mathbb{Z}$) et de spin nul incidente sur un centre diffuseur ponctuel infiniment lourd, de charge électrique $Z e$ ($Z \in \mathbb{Z}$) et de spin nul. Dans ce cas, la section efficace différentielle de diffusion s'écrit

$$\frac{d^2\sigma_R}{d^2\Omega}(\theta) = \left(\frac{z Z e^2}{8 \pi \epsilon_0} \right)^2 \frac{E(p)}{\beta (c p)^3 \sin^4(\theta/2)} \stackrel{(10)}{=} \left(\frac{z Z \alpha \hbar c}{2} \right)^2 \frac{E(p)}{\beta (c p)^3 \sin^4(\theta/2)}, \quad (68)$$

où $\beta = v/c$ est la vitesse réduite introduite en section 1.2.

D'après (15), (16) et (17), (68) se comporte de la manière suivante dans les limites non relativiste ($\beta \rightarrow 0$) et ultrarelativiste ($\beta \rightarrow 1$) :

$$\frac{d^2\sigma_R}{d^2\Omega}(\theta) \simeq \begin{cases} \left(\frac{z Z \alpha \hbar c}{4 E_c}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} & \text{lorsque } \beta \rightarrow 0 \\ \left(\frac{z Z \alpha \hbar c}{2 c p}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} & \text{lorsque } \beta \rightarrow 1 \end{cases}. \quad (69)$$

En section 4.2.3, nous ferons le détail des calculs menant à ces formules dans le cadre de la mécanique quantique.

La section efficace différentielle de Mott

On modifie légèrement la configuration précédente en considérant que le projectile est de spin 1/2. On examine donc le cas typique de la diffusion d'un électron ($z = -1$). La section efficace différentielle de diffusion (68) s'en trouve modifiée et s'écrit

$$\frac{d^2\sigma_M}{d^2\Omega}(\theta) = \frac{d^2\sigma_R}{d^2\Omega}(\theta) [1 - \beta^2 \sin^2(\theta/2)]. \quad (70)$$

La section efficace différentielle (70) se comporte donc de la manière suivante dans les limites non relativiste et ultrarelativiste :

$$\frac{d^2\sigma_M}{d^2\Omega}(\theta) \simeq \begin{cases} \left.\frac{d^2\sigma_R}{d^2\Omega}(\theta)\right|_{\beta \rightarrow 0} & \text{lorsque } \beta \rightarrow 0 \\ \left.\frac{d^2\sigma_R}{d^2\Omega}(\theta)\right|_{\beta \rightarrow 1} \cos^2(\theta/2) & \text{lorsque } \beta \rightarrow 1 \end{cases}. \quad (71)$$

Dans la limite non relativiste, le spin ne joue aucun rôle. Considérons maintenant la limite ultrarelativiste. L'effet du spin est de réduire la section efficace différentielle de diffusion à mesure que l'angle de diffusion $\theta \in [0, \pi]$ s'accroît. En particulier, dans le cas extrême d'une rétrodiffusion du projectile, c'est-à-dire lorsque $\theta = \pi$, $(d^2\sigma_M/d^2\Omega)(\theta)$ s'annule identiquement. La raison de cet effet est que l'hélicité

$$h = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \cdot \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \mathbf{p} \text{ et } \mathbf{s} \text{ sont parallèles} \\ -1 & \text{lorsque } \mathbf{p} \text{ et } \mathbf{s} \text{ sont antiparallèles} \end{cases} \quad (72)$$

d'un fermion ultrarelativiste d'impulsion \mathbf{p} et de spin 1/2 dont \mathbf{s} est la représentation sur la sphère de Bloch est un invariant du mouvement (cela se déduit de l'équation de Dirac, qui est l'équation pilotant la dynamique de la fonction d'onde d'un fermion relativiste de spin 1/2). Comme sur la figure 7, considérons que l'impulsion initiale du projectile est $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z$ avec $p > 0$, que son spin 1/2 est tel que $\mathbf{s} = s \mathbf{e}_z$ et que (Oz) est l'axe de quantification de ce dernier, c'est-à-dire que $s = \pm \hbar/2$ (voir cours de mécanique quantique de licence). Dans le cas d'une rétrodiffusion, l'impulsion finale du projectile est $\mathbf{p}' = -p' \mathbf{e}_z$ avec $p' > 0$, et donc si initialement $s = \hbar/2$ (ou $s = -\hbar/2$), il est nécessaire que finalement $s' = -\hbar/2$ (ou $s' = \hbar/2$). L'hélicité $h = h' = 1$ (ou $h = h' = -1$) est conservée par retournement du spin, tout comme le moment cinétique orbital ℓ est une constante du mouvement puisque le potentiel d'interaction coulombienne est central, mais alors le moment cinétique total $\mathbf{s} + \ell$ ne l'est pas, ce qui est impossible. Il en résulte que la rétrodiffusion d'un fermion ultrarelativiste de spin 1/2 — par une cible de spin nul — ne peut avoir lieu, ce que traduit la nullité de la section efficace différentielle de Mott lorsque $\beta \rightarrow 1$ et $\theta = \pi$.

4.2 Mécanique quantique des collisions

4.2.1 Le taux de transition quantique

En mécanique quantique, on note $\Gamma_{i \rightarrow f}$ et appelle « taux de transition de i vers f » la probabilité par unité de temps que le système évolue d'un état $|\psi_i\rangle$ vers un état $|\psi_f\rangle$. La probabilité par unité de temps pour que le système ne soit plus dans l'état $|\psi_i\rangle$ est donc $\sum_{f \neq i} \Gamma_{i \rightarrow f}$.

Considérant le problème collisionnel de la section 4.1.1 et réfléchissant bien, on comprend que si $|\psi_i\rangle$ (respectivement $|\psi_f\rangle$) est l'état (respectivement un état) quantique du système avant (respectivement après) collision, alors $\sum_{f \neq i} \Gamma_{i \rightarrow f}$ ne peut être que le taux de collision par particule-projectile et par noyau-cible :

$$\sum_{f \neq i} \Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{1}{N_f N_c} \frac{dN}{dt}, \quad (73)$$

où $N_f = n_f V$ est le nombre de particules présentes dans le volume V qu'occupe le faisceau. Combinant la première des équations (59) et les équations (61) et (73), on trouve que la section efficace de collision

$$\sigma = \frac{V}{v} \sum_{f \neq i} \Gamma_{i \rightarrow f}. \quad (74)$$

Une expression pour $\Gamma_{i \rightarrow f}$ peut être obtenue dans le cadre de la théorie des perturbations que nous détaillons dans la section suivante.

4.2.2 La règle d'or de Fermi

On considère un système quantique régi par le hamiltonien

$$\hat{H} = \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)}, \quad (75)$$

où $\hat{H}^{(1)}$ est une « petite » [condition (i)] perturbation que l'on suppose indépendante du temps pour simplifier. On note $|\psi_n\rangle$ les états propres de $\hat{H}^{(0)}$ — ils forment une base orthonormée non dégénérée de l'espace de Hilbert, supposée discrète pour simplifier — et E_n les énergies associées :

$$\hat{H}^{(0)} |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad \text{avec} \quad \langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = \delta_{n,n'} \quad \text{et} \quad g(E_n) = 1. \quad (76)$$

Le système est à $t = 0$ dans un état propre $|\psi_i\rangle$ de $\hat{H}^{(0)}$ et il évolue ensuite sous l'effet de la perturbation selon l'équation de Schrödinger

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (77)$$

dont on développe la solution sur la base des $|\psi_n\rangle$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |\psi_n\rangle, \quad \text{où} \quad c_n(0) = \delta_{n,i} \quad (78)$$

compte tenu de la condition initiale. Insérant l'ansatz (78) dans l'équation de Schrödinger (77) et projetant la formule obtenue sur un état propre arbitraire $|\psi_f\rangle$ de $\hat{H}^{(0)}$, on obtient

$$i \hbar \frac{dc_f}{dt}(t) = E_f c_f(t) + \sum_n \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_n \rangle c_n(t). \quad (79)$$

À l'ordre 0 de la théorie des perturbations pour commencer — $\hat{H}^{(1)} = 0$ —, $c_f(t) = c_f^{(0)}(t)$ est solution de

$$i \hbar \frac{dc_f^{(0)}}{dt}(t) = E_f c_f^{(0)}(t), \quad (80)$$

qui s'intègre immédiatement pour donner

$$c_f^{(0)}(t) = \delta_{f,i} e^{-iE_f t/\hbar}, \quad (81)$$

où le symbole de Kronecker rend compte de la condition initiale choisie.

À l'ordre 1 de la théorie des perturbations ensuite — $\hat{H}^{(1)} \neq 0$ est un infinitésimal du premier ordre —, $c_f^{(1)}(t) = c_f(t) - c_f^{(0)}(t)$ est aussi un infinitésimal du premier ordre, solution de

$$i \hbar \frac{dc_f^{(1)}}{dt}(t) = E_f c_f^{(1)}(t) + \sum_n \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_n \rangle c_n^{(0)}(t) \quad (82a)$$

$$\stackrel{(81)}{=} E_f c_f^{(1)}(t) + \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle e^{-iE_i t/\hbar}, \quad (82b)$$

qui s'intègre immédiatement pour donner

$$c_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle e^{-iE_f t/\hbar} \int_0^t dt' e^{i(E_f - E_i)t'/\hbar}, \quad (83)$$

où l'on a utilisé $c_f^{(1)}(0) = \delta_{f,i} - \delta_{f,i} = 0$.

On considère désormais que $f \neq i$. (81) s'annule alors et l'intégrale dans (83) est une fonction non triviale de t . Dans ce cas, la probabilité pour que le système évolue de l'état $|\psi_i\rangle$ vers l'état $|\psi_f\rangle$ se calcule comme

$$|c_f(t)|^2 = \left| -\frac{i}{\hbar} \langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle e^{-iE_f t/\hbar} \frac{e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} - 1}{i(E_f - E_i)/\hbar} \right|^2 \quad (84a)$$

$$= |\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 \frac{4 \sin^2[(E_f - E_i)t/(2\hbar)]}{(E_f - E_i)^2} \quad (84b)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 \delta_t(E_f - E_i)t, \quad (84c)$$

où l'on a introduit la fonction de E paramétrée par t

$$\delta_t(E) = \frac{t}{2\pi \hbar} \left\{ \frac{\sin[Et/(2\hbar)]}{Et/(2\hbar)} \right\}^2. \quad (85)$$

Lorsque t est « grand » [condition (ii)], ce que nous considérons dès à présent, la fonction (85) est approximable par la « fonction » de Dirac $\delta(E)$. Dans ce cas, $|c_f(t)|^2$ est une fonction linéaire de t et le taux de transition de i vers f , $\Gamma_{i \rightarrow f} = d|c_f(t)|^2/dt$, ne dépend pas de t et se calcule comme

$$\Gamma_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (86)$$

Ce résultat perturbatif très célèbre est connu sous le nom de règle d'or de Fermi.

Explicitons-en ses conditions de validité (i) et (ii). La condition (i) est équivalente à dire que la probabilité de transition de i vers f est petite devant un, soit d'après les équations (84) et (85) que $\max |c_f(t)|^2 = |\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 t^2/\hbar^2 \ll 1$. D'après les mêmes formules, la condition (ii) s'écrit quant à elle $|E_f - E_i|t/\hbar \gg 1$. On en tire que la règle d'or de Fermi est valable lorsque

$$|\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle| \ll \frac{\hbar}{t} \ll |E_f - E_i|. \quad (87)$$

4.2.3 Application à la diffusion de Rutherford

On reprend ici l'exemple de la diffusion de Rutherford donné en section 4.1.2. D'après la règle d'or de Fermi, la section efficace correspondante doit se calculer sous la forme

$$\sigma_R \stackrel{(74),(86)}{=} \frac{2\pi V}{\hbar v} \sum_{f \neq i} |\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i), \quad (88)$$

où $|\psi_i\rangle$ et $|\psi_f\rangle$ (respectivement E_i et E_f) représentent les états quantiques (respectivement les énergies) du projectile bien avant et bien après diffusion — et seulement du projectile puisque le centre diffuseur est infiniment lourd — et où $\hat{H}^{(1)}$ décrit l'interaction coulombienne entre le projectile et la cible.

Loin de portée du centre diffuseur, le projectile est libre et ses fonctions d'onde initiale et finale s'écrivent

$$\langle \mathbf{r} | \psi_i \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}} \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{r} | \psi_f \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{\sqrt{V}}, \quad (89)$$

où l'impulsion finale \mathbf{p}' (de norme p') forme un angle θ avec l'impulsion initiale \mathbf{p} (de norme p) : $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{p} = p' p \cos \theta$. Le hamiltonien d'interaction coulombienne est diagonal dans la représentation $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ et ses coefficients vérifient l'équation de Poisson :

$$\langle \mathbf{r}' | \hat{H}^{(1)} | \mathbf{r} \rangle = \left[\begin{array}{c} \text{charge électrique} \\ \text{du projectile} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{c} \text{potentiel électrique} \\ \text{de la cible} \end{array} \right] \times \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \quad (90a)$$

$$= z e \mathcal{V}(\mathbf{r}) \delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (90b)$$

où

$$\nabla^2 \mathcal{V}(\mathbf{r}) = - \left[\begin{array}{c} \text{distribution de charge électrique} \\ \text{de la cible (ponctuelle)} \end{array} \right] \div \varepsilon_0 \quad (91a)$$

$$= - \frac{Z e}{\varepsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{r}). \quad (91b)$$

On est maintenant en capacité de calculer $|\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2$:

$$|\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 = \left| \int d^3 r' d^3 r \langle \psi_f | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \hat{H}^{(1)} | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | \psi_i \rangle \right|^2 \quad (92a)$$

$$\stackrel{(89),(90)}{=} \left(\frac{z e}{V} \right)^2 \left| \int d^3 r \mathcal{V}(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\cdot\mathbf{r}/\hbar} \right|^2 \quad (92b)$$

$$\stackrel{(91)}{=} \left(\frac{z Z e^2 \hbar^2}{V \varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|^4} \quad (92c)$$

$$= \left(\frac{z Z e^2 \hbar^2}{V \varepsilon_0} \right)^2 \frac{1}{(p'^2 + p^2 - 2 p' p \cos \theta)^2}. \quad (92d)$$

Dans le volume V , on quantifie l'impulsion comme dans le cours de mécanique quantique de licence, et supposant V très grand, on a

$$\sum_{f \neq i} \simeq \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} \int d^3 p' = \frac{V}{(2\pi \hbar)^3} \int p'^2 dp' d^2 \Omega. \quad (93)$$

Ainsi, insérant (92d) dans (88) et notant $E_i = E(p)$ et $E_f = E(p')$ avec $E(q) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 q^2}$, on trouve

$$\sigma_R = \frac{1}{v} \left(\frac{z Z e^2}{2\pi \varepsilon_0} \right)^2 \int dp' d^2\Omega \left(\frac{p'}{p'^2 + p^2 - 2 p' p \cos \theta} \right)^2 \underbrace{\delta[E(p') - E(p)]}_{= \frac{E(p)}{c^2 p} \delta(p' - p)} \quad (94a)$$

$$= \left(\frac{z Z e^2}{8\pi \varepsilon_0} \right)^2 \frac{E(p)}{\beta (c p)^3} \int \frac{d^2\Omega}{\sin^4(\theta/2)}, \quad (94b)$$

de quoi on tire la section efficace différentielle $(d^2\sigma_R/d^2\Omega)(\theta)$ telle que donnée par l'équation (68).

4.3 Temps de vie d'un élément instable

Le temps de vie τ d'un élément instable correspond au « temps de vie » de son état quantique initial $|\psi_i\rangle$, soit

$$\tau = \frac{1}{\sum_{f \neq i} \Gamma_{i \rightarrow f}}, \quad (95)$$

où $\Gamma_{i \rightarrow f}$ peut se calculer à l'aide de la règle d'or de Fermi (86). Dans le cadre de la section 3.4.6, (95) n'est rien d'autre que (56). Le dernier exercice des travaux dirigés est dédié au calcul du temps de vie du muon, particule élémentaire instable qui se désintègre spontanément en un électron, un antineutrino électronique et un neutrino muonique.

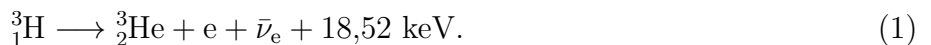
Deuxième partie

Exercices

1 Masse et stabilité des noyaux

1.1 Désintégration β^- de l'hydrogène-3 et distance interprotonique dans l'hélium-3

L'hydrogène-3, ou tritium, se transforme spontanément en hélium-3 par désintégration β^- :



- 1 Nommer les particules e et $\bar{\nu}_e$. À quoi correspondent les 18,52 keV de la réaction précédente ?
- 2 Vérifier que le nombre de masse est conservé au cours de cette désintégration. De quelles façons le numéro atomique et le nombre de neutrons varient-ils ?
- 3 On suppose que la différence d'énergie de liaison entre le tritium et l'hélium-3 est essentiellement due à la répulsion électrostatique entre les protons de l'hélium-3. Quelle distance sépare ces deux derniers ? On donne :
 - Constante de structure fine : $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137,04$;
 - Constante de Planck réduite : $\hbar \simeq 197,33 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \cdot c^{-1}$;
 - Masse du proton : $m_p \simeq 938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$;
 - Masse du neutron : $m_n \simeq 939,57 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$;
 - Masse de l'électron : $m_e \simeq 0,51 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$.

1.2 Courbe d'Aston et formule de Bethe-Weizsäcker : instabilité des noyaux lourds

L'énergie de liaison de la particule $\alpha = {}^4\text{He}$ vaut environ 28,3 MeV. À partir de quel nombre de masse A la désintégration



est-elle énergétiquement possible ?

1.3 Chaîne de désintégration naturelle de l'uranium-235

- 1 Un noyau radioactif subit une désintégration α . Que valent le nombre de masse et le numéro atomique de la particule α ? En déduire le numéro atomique et le nombre de neutrons du noyau-fils en fonction de ceux du noyau-père. Indiquer les positions des noyau-père et noyau-fils sur un diagramme reportant le nombre de neutrons en fonction du nombre de protons.
- 2 Mêmes questions lorsque ledit noyau subit une désintégration β^- .
- 3 À l'aide de la table 1, trouver la chaîne de désintégration naturelle de l'uranium-235. On représentera cette chaîne sur un diagramme similaire à celui des questions précédentes.

Nombre de protons	Élément	Nombre de nucléons	Radioactivité principale	Période radioactive
81	Thallium (Tl)	207	β^-	4,77 min
82	Plomb (Pb)	206	Aucune	∞
		207	Aucune	∞
		208	Aucune	∞
		210	β^-	22,20 a
		211	β^-	36,12 min
83	Bismuth (Bi)	209	α	$1,92 \times 10^{19}$ a
		211	α	2,13 min
84	Polonium (Po)	210	α	138,38 j
		214	α	$1,64 \times 10^{-4}$ s
		215	α	$1,78 \times 10^{-3}$ s
85	Astate (At)	218	α	1,53 s
86	Radon (Rn)	219	α	3,96 s
		222	α	3,82 j
87	Francium (Fr)	223	β^-	22,01 min
88	Radium (Ra)	223	α	11,43 j
		226	α	$1,62 \times 10^3$ a
89	Actinium (Ac)	227	β^-	21,77 a
90	Thorium (Th)	227	α	18,72 j
		228	α	1,91 a
		231	β^-	25,52 h
		232	α	$1,41 \times 10^{10}$ a
91	Protactinium (Pa)	231	α	$3,28 \times 10^4$ a
92	Uranium (U)	235	α	$7,04 \times 10^8$ a

TABLE 1 – Une liste non exhaustive de noyaux lourds. La plupart sont radioactifs α ou β^- . Trois sont stables. ^{209}Bi et ^{232}Th ont un $t_{1/2}$ supérieur ou égal à l'âge de l'Univers...

1.4 Du plutonium-238 pour alimenter une sonde spatiale en électricité

La sonde spatiale Voyager 2, lancée depuis la Terre en 1977, embarque une batterie au plutonium-238 qui convertit l'énergie de désintégration de son composé radioactif en électricité avec une efficacité de 5,5 %. Le plutonium-238, dont la durée de vie est de 127 ans environ, se transforme spontanément en uranium-234 par désintégration α :



Voyager 2 survola Saturne en 1981 et Neptune en 1989. Ces deux planètes du Système solaire externe sont respectivement situées à 9,54 au et 30,11 au environ du Soleil, 1 au (« une unité astronomique ») correspondant à la distance Terre-Soleil.

- 1 La puissance électrique délivrée par la batterie de Voyager 2 était de 395 W au survol de Saturne. Quelle masse de plutonium-238 embarquait-elle au décollage de la Terre ? La masse d'un nucléon est de $1,7 \times 10^{-27}$ kg environ.
- 2 Quelle puissance électrique délivrait-elle au survol de Neptune ?
- 3 Les panneaux solaires de la station spatiale Skylab, dont la superficie utile était de 730 m^2 , délivraient 10,5 kW de puissance électrique, calculée comme

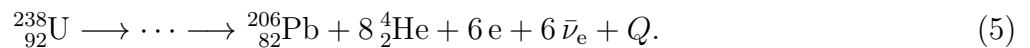
$$P = P_0 \frac{S}{D^2}, \quad (4)$$

où P_0 est une constante homogène à une puissance, S la surface utile des panneaux solaires et D la distance panneaux solaires-Soleil. Imaginons que Voyager 2 ait utilisé ces mêmes panneaux solaires pour s'alimenter en électricité. Quelle aurait dû être leur superficie utile afin de produire une puissance électrique équivalente à celle délivrée par la batterie au plutonium-238 au survol de Saturne ? De Neptune ? Commenter.

1.5 L'uranium dans la nature : âge de la Terre

L'uranium naturel est principalement constitué de 99,28 % d'uranium-238, dont le temps de demi-vie $(t_{1/2})_{238} \simeq 4,5 \text{ Ga}$, et de 0,72 % d'uranium-235, dont la durée de vie $\tau_{235} \simeq 1 \text{ Ga}$. La proportion de l'isotope 234, présent dans la nature lui aussi, est comparativement dérisoire et donc négligée.

- 1 Quel est l'âge de la Terre sachant que les isotopes 238 et 235 de l'uranium étaient en proportions égales au moment de sa formation ?
- 2 Quelle proportion d'uranium-238 s'est désintégrée depuis la formation de la croûte terrestre il y a 2,5 milliards d'années environ ?
- 3 La chaîne principale de désintégration naturelle de l'uranium-238 est résumée en



Évaluer l'énergie de désintégration Q . On donne :

- Masse du proton : $m_p \simeq 938,3 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$;
- Masse du neutron : $m_n \simeq 939,6 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$;
- Masse de l'électron : $m_e \simeq 0,5 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$;
- Énergie de liaison de l'uranium-238 : $B(238, 92) \simeq 238 \times 7,6 \text{ MeV}$ (d'après la courbe d'Aston ; rappeler son allure) ;
- Énergie de liaison du plomb-206 : $B(206, 82) \simeq 206 \times 7,9 \text{ MeV}$ (même remarque) ;
- Énergie de liaison de l'hélium-4 : $B(4, 2) \simeq 4 \times 7,1 \text{ MeV}$ (même remarque).

1.6 Effet tunnel et radioactivité α : modèle de Gamow

La désintégration α — désintégration d'un noyau s'accompagnant de l'émission d'un nucléide d'hélium-4 (${}^4_2\text{He}$), dit particule α — ne serait pas une forme de fission nucléaire comme une autre. En effet, des observations laissent penser que les nucléons dudit noyau se regroupent en « paquets » et que les particules α émises suite à la désintégration du radioélément ne seraient que ces paquets préformés de nucléons. Une désintégration α aurait donc lieu lorsqu'une particule α acquiert une

énergie cinétique suffisante pour vaincre le potentiel d'interaction forte — attractif — liant les paquets de nucléons entre eux à l'intérieur du noyau, et ainsi en sortir en « dévalant » le potentiel d'interaction électrostatique — répulsif et proportionnel à l'inverse de la distance r au centre du noyau — à l'extérieur du noyau. Cette modélisation de la radioactivité α a été formalisée dans le cadre de la théorie quantique en 1928 par le scientifique Gamow. Le potentiel nucléaire $U(r)$ considéré par Gamow, ressenti par la particule α , est représenté en trait plein à la figure 1. Sur cette même figure, la ligne pointillée correspond à l'énergie cinétique E de la particule α .

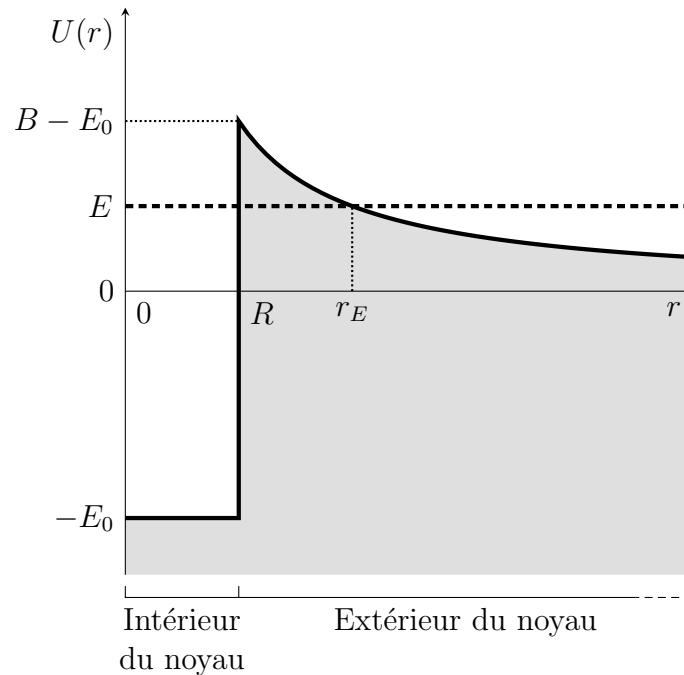


FIGURE 1 – EN TRAIT PLEIN : Potentiel nucléaire de Gamow en fonction de la distance au centre du noyau. EN TRAIT POINTILLÉ : Énergie cinétique de la particule α .

- 1 À quoi correspondent les quantités R , $-E_0$ et B ?
- 2 Décrire succinctement le comportement de la particule α — d'abord dans un cadre classique, et ensuite quantique — lorsque (i) $-E_0 < E < 0$, (ii) $0 < E < B - E_0$ puis (iii) $E > B - E_0$.
- 3 On considère, comme sur le schéma, que $0 < E < B - E_0$. La probabilité quantique que la particule α franchisse la barrière électrostatique s'identifie au coefficient de transmission à travers la barrière, T , donné dans le cadre de l'approximation BKW (traitement semi-classique d'un système quantique dû aux physiciens Brillouin, Kramers et Wentzel) par la formule

$$T = \exp \left\{ -2 \int_R^{r_E} dr \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} [U(r) - E]} \right\}, \quad (6)$$

où m est la masse de la particule α . En utilisant la primitive

$$\int^x dy \sqrt{\frac{1}{y} - 1} = \text{constante} + \sqrt{x(1-x)} - \arccos \sqrt{x}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (7)$$

montrer que

$$T = \exp \left[-2 \sqrt{\frac{B - E_0}{\hbar^2 R^{-2}/(2m)}} \left(\frac{\arccos \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{1 - \varepsilon} \right) \right], \quad \text{où } \varepsilon = \frac{E}{B - E_0}. \quad (8)$$

4 Tracer T en fonction de $\varepsilon \in (0, 1)$.

1.7 Diagrammes de Feynman des désintégrations β

Le neutron est constitué de deux quarks down et d'un quark up (« $\mathbf{n} = \{\text{u}, \text{d}, \text{d}\}$ »). Le proton est quant à lui constitué de deux quarks up et d'un quark down (« $\mathbf{p} = \{\text{u}, \text{d}, \text{u}\}$ »). La radioactivité β^- est la conséquence de la conversion d'un **neutron** en un **proton** par la transmutation d'un quark **down** en un quark **up** par émission spontanée d'un boson de jauge W^- qui se désintègre en un électron et un antineutrino électronique (respirer fort...). La radioactivité β^+ est quant à elle la conséquence de la conversion d'un **proton** en un **neutron** par la transmutation d'un quark **up** en un quark **down** par émission spontanée d'un boson de jauge W^+ qui se désintègre en un positron et un neutrino électronique.

- 1 Construire les diagrammes de Feynman représentant les désintégrations β^- et β^+ .
- 2 Dans chaque cas, vérifier que la charge électrique q et le nombre leptonique ℓ se conservent au cours du temps. Si la particule est un lepton (respectivement un antilepton), alors $\ell = 1$ (respectivement $\ell = -1$); si elle n'est ni un lepton, ni un antilepton, alors $\ell = 0$.

2 Collisions et désintégrations

2.1 Cinématique élémentaire de la diffusion de Rutherford classique

Une particule non relativiste de masse m , de charge électrique q et de vitesse constante $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$ (telle que $v_0 > 0$) arrive avec un paramètre d'impact b depuis $(x, y) = (-\infty, b)$ sur un ion de charge électrique Q (telle que $qQ > 0$) constamment situé en $(x, y) = (0, 0)$.

- 1 Schématiser la trajectoire de la particule dans le plan cartésien engendré par \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y . On indiquera sur le graphique les grandeurs de l'énoncé, les coordonnées polaires r et θ d'un point de la trajectoire suivie par la particule ainsi que la plus petite distance r_b (à b fixé) séparant la particule de l'ion. Exprimer l'énergie potentielle d'interaction entre la particule et l'ion diffuseur.
- 2 Exprimer en coordonnées à la fois cartésiennes et polaires l'énergie cinétique et le moment cinétique de la particule en n'importe quel point de sa trajectoire.
- 3 Que valent ces derniers bien avant que la particule ne soit déviée de sa trajectoire rectiligne?
- 4 En déduire que

$$r^2 - r_0 r - b^2 = \frac{\dot{r}^2}{v_0^2} r^2, \quad \text{où } r_0 = \frac{qQ}{2\pi \varepsilon_0 m v_0^2}. \quad (9)$$

- 5 Conclure que

$$r_b = \frac{r_0}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{b^2}{r_0^2}} \right). \quad (10)$$

Pour quelle valeur de b r_b est-il minimal?

2.2 Diffusion d'un photon énergétique par un électron faiblement lié : effet Compton

Un photon énergétique (γ) entre en collision avec un électron (e) faiblement lié d'un atome. On suppose que l'électron est initialement au repos et que la diffusion est élastique. On note M la masse de l'électron, respectivement $\mathbf{p}_{1(2)}$ et $e_{1(2)}$ [$\mathbf{P}_{1(2)}$ et $E_{1(2)}$] l'impulsion et l'énergie initiales (finales) du photon [de l'électron] et θ l'angle de déviation du photon (voir figure 2).

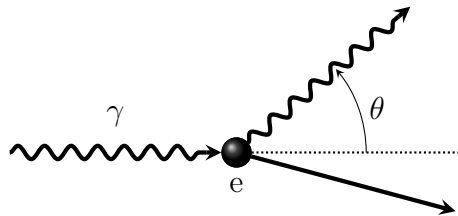


FIGURE 2 – Représentation schématique de la diffusion Compton d'un photon énergétique par un électron faiblement lié d'un atome.

- 1 Que vaut \mathbf{P}_1 ? Exprimer e_1 en fonction de la célérité de la lumière c et $p_1 = |\mathbf{p}_1|$, e_2 en fonction de c et $p_2 = |\mathbf{p}_2|$, E_1 en fonction de M et c , et E_2 en fonction de M , c et $P_2 = |\mathbf{P}_2|$.
- 2 Montrer que la variation de la longueur d'onde du photon induite par la collision s'écrit

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \lambda_C (1 - \cos \theta), \quad \text{où} \quad \lambda_C = \frac{h}{Mc} \simeq 2,43 \text{ pm} \quad (11)$$

est la longueur d'onde de Compton. On utilisera la relation de de Broglie

$$\lambda_i = \frac{h}{p_i} \quad (i \in \{1, 2\}), \quad (12)$$

où h est la constante de Planck.

- 3 Montrer que la variation relative de l'énergie du photon induite par la collision s'écrit

$$\frac{e_2 - e_1}{e_1} = -\frac{\lambda_C (1 - \cos \theta)}{\lambda_1 + \lambda_C (1 - \cos \theta)}. \quad (13)$$

2.3 Faisceau de neutrons sur une lame d'uranium-235

Une lame d'uranium-235 de masse surfacique $0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2}$ est toutes les secondes frappée perpendiculairement par 10^5 neutrons d'énergie cinétique $0,29 \text{ eV}$. Un neutron du faisceau peut soit traverser la plaque sans être dévié, soit subir une collision élastique avec un noyau d'uranium-235 (processus « e »), soit être absorbé par un noyau d'uranium-235 qui subit une fission (processus « f »), soit être absorbé par un noyau d'uranium-235 qui émet un photon (processus « γ »). Les probabilités respectives sont proportionnelles aux sections efficaces correspondantes, à savoir $\sigma_e \simeq 2 \times 10^{-30} \text{ m}^2$, $\sigma_f \simeq 2 \times 10^{-26} \text{ m}^2$ et $\sigma_\gamma \simeq 7 \times 10^{-27} \text{ m}^2$.

- 1 Calculer la vitesse des neutrons incidents. Sont-ils relativistes?
- 2 Combien la cible comporte-t-elle de noyaux d'uranium-235 par unité de surface?
- 3 En déduire (i) la fraction de neutrons subissant une collision quelconque, (ii) le nombre de fissions nucléaires par seconde et (iii) le nombre de neutrons par seconde atteignant une surface de $0,3 \text{ m}^2$ située à 10 m de la lame.

2.4 Faisceau de deutons sur une lame de tritium

Un faisceau de deutons (${}^2_1\text{H}$) d'intensité électrique $2 \mu\text{A}$ et d'énergie cinétique 5 MeV frappe perpendiculairement une lame de tritium (${}^3_1\text{H}$) de masse surfacique $0,2 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-2}$. Au cours de la collision deuton-tritium, dont la section efficace différentielle vaut environ $1,3 \times 10^{-30} \text{ m}^2 \cdot \text{sr}^{-1}$, des neutrons sont produits selon la réaction



Un détecteur neutronique de surface 20 cm^2 est placé à 3 m derrière la cible.

- 1 Quelle est la vitesse des deutons incidents ? Sont-ils relativistes ?
- 2 Calculer l'angle solide défini par la taille du détecteur.
- 3 Combien y a-t-il de noyaux-cibles par unité de surface ?
- 4 En déduire le nombre de neutrons détectés par seconde.
- 5 Même question avec une plaque inclinée de 10° par rapport à sa position d'origine.

2.5 Libre parcours moyen dans une cible épaisse

Un faisceau de particules est projeté sur une cible épaisse : \mathcal{M} et ρ sont respectivement la masse molaire et la masse volumique de l'élément constituant la cible ; σ est la section efficace de collision entre les particules du faisceau et les noyaux de la cible.

- 1 Montrer que la loi qui décrit l'atténuation de l'intensité I du faisceau en fonction de l'épaisseur x de matière traversée est une exponentielle décroissante :

$$I(x) = I_0 e^{-x/\ell}, \quad (15)$$

où $I_0 = I(x=0)$ est l'intensité incidente et

$$\ell = \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{N}_A \rho \sigma} \quad (16)$$

(\mathcal{N}_A est le nombre d'Avogadro) la longueur d'atténuation typique de l'intensité du faisceau. Cette longueur s'identifie au libre parcours moyen, distance moyenne parcourue par une particule entre deux « impacts » successifs.

- 2 Évaluer ℓ lorsque les particules du faisceau sont des neutrons et que la cible est constituée de cadmium-112, dont la masse volumique est de $8,6 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ environ. La section efficace de collision neutron-cadmium-112 vaut approximativement $2,5 \times 10^{-24} \text{ m}^2$.

2.6 Section efficace différentielle de diffusion dans un collisionneur électron-positron

Dans un anneau de collision électron-positron de rayon R , tel que celui du LEP, arrêté en 2000 pour permettre la construction du LHC, des électrons (e^-) et des positrons (e^+) circulent en sens inverses à une vitesse proche de celle de la lumière dans le vide. On admet que les électrons et les positrons se répartissent uniformément dans deux paquets cylindriques distincts de même section transverse S , de même longueur et de même axe. On note N_- le nombre d'électrons, N_+ celui de positrons, I_- l'intensité électrique moyenne du faisceau d'électrons, I_+ celle du faisceau de positrons et σ la section efficace de collision électron-positron.

1 Montrer que le nombre de collisions par unité de temps s'écrit

$$\frac{dN}{dt} = \frac{c}{2\pi R} \frac{\sigma}{S} N_- N_+ = \frac{2\pi R}{c} \frac{\sigma}{S} \frac{I_- I_+}{e^2}. \quad (17)$$

2 Un détecteur compte le nombre de collisions. Celui-ci a la forme d'une couronne centrée sur l'axe des faisceaux. Il couvre donc toutes les longitudes φ mais qu'une partie des colatitudes θ , celles comprises entre 3° et 8° pour être précis. Dans cette fourchette de petits angles, la section efficace différentielle de collision électron-positron s'écrit (E est l'énergie des faisceaux)

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}(\theta) = \left(\frac{4\alpha\hbar c}{E}\right)^2 \frac{1}{\theta^4}. \quad (18)$$

Faire un schéma et expliquer l'équation (18). Combien le détecteur compte-t-il de réactions en une heure sachant que $R = 4,5$ km, $E = 90$ GeV, $S = 0,5$ mm² et $I_- = I_+ = 3$ mA ? On rappelle que la constante de structure fine vaut environ $1/137$ et que la constante de Planck réduite multipliée par la vitesse de la lumière dans le vide est à peu près de 197 MeV · fm.

2.7 Détection de neutrinos cosmiques

L'implosion de l'étoile aboutissant à la supernova SN 1987A, observée en février 1987 dans le Grand nuage de Magellan, a produit en l'espace de quelques secondes environ 10^{57} antineutrinos électroniques ($\bar{\nu}_e$) d'énergie voisine de 15 MeV. Ces derniers ont été détectés à l'observatoire de neutrinos Kamiokande, au Japon, en comptant les positrons (\bar{e}) émis au cours de la réaction



dont la section efficace est de $1,64 \times 10^{-45}$ m² environ. Le détecteur Kamiokande consistait en un réservoir de 2 kt d'eau. Sachant que seuls les protons (p) de l'hydrogène de la molécule d'eau peuvent réagir avec un antineutrino électronique, ceux de l'oxygène étant trop liés, que la masse molaire de l'eau vaut à peu près 18 g · mol⁻¹ et que la distance entre le Grand nuage de Magellan et la Terre est de $1,5 \times 10^5$ années-lumière environ, calculer le nombre d'évènements détectés par Kamiokande.

2.8 Diffusion élastique d'électrons ultrarelativistes par des noyaux immobiles

Un faisceau d'électrons ultrarelativistes d'impulsion \mathbf{p} et d'énergie E atteint une cible composée de noyaux dont l'énergie de recul est négligeable. On observe les électrons d'impulsion \mathbf{p}' et d'énergie E' diffusés autour de la direction portée par \mathbf{p}' , qui forme un angle θ avec le faisceau incident, dans un angle solide $d^2\Omega$ défini par la taille du détecteur (voir figure 3). Ceci permet, en déplaçant le détecteur, de mesurer la section efficace différentielle de diffusion $d^2\sigma/d^2\Omega$ en fonction de θ . On appelle \mathbf{q} la différence $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$. Enfin, *on ne considère pas le spin de l'électron*. Dans ce problème, nous cherchons à exprimer

$$d^2\sigma = \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} d^2\Omega = J^{-1} \int_{\{d^2\Omega\}} d^3N(|\psi'\rangle) \frac{dP(|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle)}{dt} \quad (20)$$

en fonction de θ , où J s'exprime en m⁻² · s⁻¹ et

$$\frac{dP(|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle)}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi' | \hat{H}_C | \psi \rangle|^2 \delta(E' - E) \quad (21)$$

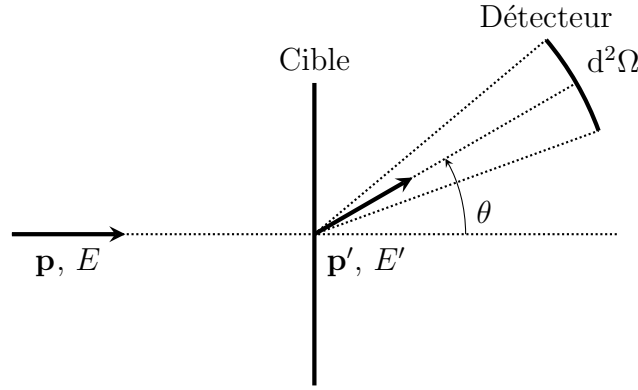


FIGURE 3 – Des électrons ultrarelativistes entrent en collision avec les noyaux immobiles d’une cible mince. Après diffusion élastique, on les « collecte » dans l’angle solide défini par la taille du détecteur.

est la probabilité de transition par unité de temps de l’état électronique initial $|\psi\rangle$ d’énergie E vers un élément $|\psi'\rangle$ d’énergie E' de l’ensemble $\{d^2\Omega\}$, de mesure $N(\{d^2\Omega\})$, des états électroniques finaux observés dans l’angle solide $d^2\Omega$. L’expression précédente, perturbative et connue sous le nom de règle d’or de Fermi, fait intervenir l’énergie d’interaction coulombienne entre un électron de charge électrique $-e$ et un noyau-cible de charge électrique Ze :

$$\langle \mathbf{r} | \hat{H}_C | \mathbf{r}' \rangle = -e V(\mathbf{r}) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (22)$$

où $V(\mathbf{r})$ est le potentiel de Coulomb d’un noyau. L’état initial $|\psi\rangle$ (qui décrit l’électron incident) est quant à lui représenté par une onde plane de vecteur d’onde \mathbf{p}/\hbar , normalisée dans un volume cubique dont le côté L est grand par rapport à la portée typique de $V(\mathbf{r})$:

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{L^{3/2}}. \quad (23)$$

De même, l’état final $|\psi'\rangle$ (qui décrit l’électron diffusé) est représenté par

$$\psi'(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi' \rangle = \frac{e^{i\mathbf{p}'\cdot\mathbf{r}/\hbar}}{L^{3/2}}. \quad (24)$$

- 1** La règle d’or de Fermi (21) suggère que la diffusion des électrons est élastique. Vérifier que cela entraîne

$$|\mathbf{p}'| = |\mathbf{p}| = \frac{E}{c}. \quad (25)$$

En déduire $|\mathbf{q}|$ en fonction de E , c et $\sin(\theta/2)$.

- 2** Exprimer J en fonction de c et L .
3 Exprimer $\langle \psi' | \hat{H}_C | \psi \rangle$ en fonction de e , L et

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \int d^3r V(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar}, \quad (26)$$

la transformée de Fourier de $V(\mathbf{r})$ en \mathbf{q} .

- 4 On impose les conditions aux limites périodiques aux bornes de la boîte cubique de côté L , son centre étant situé à l'origine. Rappeler que le nombre d'états $|\psi'\rangle$ accessibles à un électron diffusé dans l'angle solide $d^2\Omega$ et dont la norme de l'impulsion \mathbf{p}' est incertaine de $d|\mathbf{p}'|$ s'écrit

$$d^3N(|\psi'\rangle) = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d^2\Omega. \quad (27)$$

- 5 Dédurre des trois questions précédentes que

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \left[\frac{eE}{2\pi(\hbar c)^2}\right]^2 |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2, \quad (28)$$

où \mathbf{q} est contraint à valoir ce que vous avez trouvé en question 1.

- 6 Rappeler l'équation aux dérivées partielles dont $V(\mathbf{r})$ est solution. En déduire que

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{Ze\hbar^2}{\varepsilon_0} \frac{\tilde{f}(\mathbf{q})}{|\mathbf{q}|^2}, \quad \text{où } \tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d^3r f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \quad (29)$$

est la transformée de Fourier en \mathbf{q} de $f(\mathbf{r})$, la densité de charge électrique du noyau divisée par sa charge électrique totale.

- 7 Combiner les résultats des questions 1, 5 et 6 pour finalement écrire

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 E}\right)^2 \frac{|\tilde{f}(\mathbf{q})|^2}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (30)$$

- 8 Dans le cas où les centres diffuseurs sont ponctuels,

$$f(\mathbf{r}) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad \text{d'où } \tilde{f}(\mathbf{q}) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}. \quad (31)$$

À quelle section efficace différentielle du cours le résultat précédent vous fait-il penser ? Comment se comporte $d^2\sigma/d^2\Omega$ lorsque $\theta \rightarrow 0$?

- 9 On complexifie légèrement le problème en supposant que les centres diffuseurs ne sont pas ponctuels, leur charge électrique individuelle se répartissant uniformément dans une sphère de rayon $R \sim 10$ fm (taille typique d'un noyau). Dans ce cas, exprimer $f(\mathbf{r})$ en fonction de \mathbf{r} et montrer que

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \frac{3}{Q^2} \left(\frac{\sin Q}{Q} - \cos Q\right), \quad \text{où } Q = \frac{|\mathbf{q}|R}{\hbar}. \quad (32)$$

Comment se comporte $d^2\sigma/d^2\Omega$ lorsque $\theta \rightarrow 0$?

2.9 Hamiltonien de Fermi

On considère que le hamiltonien \hat{H}_F qui décrit la désintégration d'une particule P_1 en trois particules P_2 , P_3 et P_4 s'écrit dans la représentation de position

$$\langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 | \hat{H}_F | \mathbf{r}_1 \rangle = G_F \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) \delta^{(3)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_4), \quad (33)$$

où $\mathbf{r}_\ell = (x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ est la position de la particule P_ℓ .

- 1 Quelle est la dimension de la constante de couplage G_F ? Décrire l'équation (33).
- 2 On note $\psi_\ell(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi_\ell \rangle$ la fonction d'onde de la particule P_ℓ au point \mathbf{r} . Écrire les fonctions d'onde $\Psi_{\text{initial}}(\mathbf{r}_1) = \langle \mathbf{r}_1 | \Psi_{\text{initial}} \rangle$ et $\Psi_{\text{final}}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) = \langle \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4 | \Psi_{\text{final}} \rangle$ caractérisant les états initial et final du système en termes des $\psi_\ell(\mathbf{r}_\ell)$.

3 En déduire que

$$\langle \Psi_{\text{final}} | \hat{H}_F | \Psi_{\text{initial}} \rangle = G_F \int d^3r \psi_1(\mathbf{r}) \psi_2^*(\mathbf{r}) \psi_3^*(\mathbf{r}) \psi_4^*(\mathbf{r}). \quad (34)$$

- 4 La particule P_ℓ se déplace dans une boîte cubique de côté L et sa fonction d'onde est plane d'impulsion \mathbf{p}_ℓ . Comment s'écrit $\psi_\ell(\mathbf{r})$ dans ce cas? On fixe maintenant l'origine des coordonnées au centre de la boîte, que l'on munit également des conditions aux bords périodiques

$$\psi_\ell(-L/2, y, z) = \psi_\ell(L/2, y, z), \quad (35)$$

$$\psi_\ell(x, -L/2, z) = \psi_\ell(x, L/2, z) \quad \text{et} \quad (36)$$

$$\psi_\ell(x, y, -L/2) = \psi_\ell(x, y, L/2). \quad (37)$$

Montrer que cela entraîne la quantification suivante :

$$\mathbf{p}_\ell = \frac{2\pi \hbar}{L} \mathbf{n}_\ell, \quad \text{où } \mathbf{n}_\ell \in \mathbb{Z}^3. \quad (38)$$

5 En déduire que

$$\langle \Psi_{\text{final}} | \hat{H}_F | \Psi_{\text{initial}} \rangle = \begin{cases} G_F/L^3 & \text{lorsque } \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4 = \mathbf{n}_1 \\ 0 & \text{lorsque } \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 + \mathbf{n}_4 \neq \mathbf{n}_1 \end{cases}. \quad (39)$$

Commenter ce résultat.

2.10 Temps de vie du muon

Le muon (μ), de masse $m \simeq 105,7 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$, est une particule élémentaire instable qui se désintègre en un électron (e), un antineutrino électronique ($\bar{\nu}_e$) et un neutrino muonique (ν_μ) :

$$\mu \longrightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu. \quad (40)$$

On se place dans le référentiel du muon, dans une grande boîte cubique de côté L aux bords périodiques. Dans l'approximation de l'interaction de contact de Fermi, la règle d'or de Fermi permet de calculer l'inverse du temps de vie du muon :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= \int \left(\frac{L}{2\pi \hbar} \right)^9 d^3p_e d^3p_{\bar{\nu}_e} d^3p_{\nu_\mu} \\ &\times \frac{2\pi}{\hbar} \times \left(\frac{G_F}{L^3} \right)^2 \left(\frac{2\pi \hbar}{L} \right)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e} + \mathbf{p}_{\nu_\mu}) \times \delta(E_e + E_{\bar{\nu}_e} + E_{\nu_\mu} - m c^2). \end{aligned} \quad (41)$$

- 1 Expliquer avec précision l'équation donnée ci-dessus.
- 2 On suppose que pour tout $i \in \{e, \bar{\nu}_e, \nu_\mu\}$, $E_i \simeq c p_i$, où $p_i = |\mathbf{p}_i|$. Justifier cette approximation.

3 Montrer que

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G_F^2}{32 \pi^5 \hbar^7} \int d^3 p_e d^3 p_{\bar{\nu}_e} \delta(c p_e + c p_{\bar{\nu}_e} + c |\mathbf{p}_e + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}| - m c^2) \quad (42a)$$

$$= \frac{G_F^2}{4 \pi^3 \hbar^7} \int dp_e dp_{\bar{\nu}_e} d(\cos \theta) (p_e p_{\bar{\nu}_e})^2 \delta\left(c p_e + c p_{\bar{\nu}_e} + c \sqrt{p_e^2 + p_{\bar{\nu}_e}^2 + 2 p_e p_{\bar{\nu}_e} \cos \theta} - m c^2\right) \quad (42b)$$

$$= \frac{G_F^2}{4 \pi^3 \hbar^7 c} \int_0^{m c} dp_e p_e \int_0^{m c - p_e} dp_{\bar{\nu}_e} p_{\bar{\nu}_e} (m c - p_e - p_{\bar{\nu}_e}). \quad (42c)$$

4 En déduire que

$$\tau = \frac{480 \pi^3 \hbar}{(m c^2)^5 \left[\frac{G_F}{(\hbar c)^3} \right]^2}. \quad (43)$$

5 Évaluer τ sachant que $G_F/(\hbar c)^3 \simeq 1,1 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.