

Particules et noyaux

Examen de 1^{re} session

Mardi 19 mai 2020

14 h — 17 h

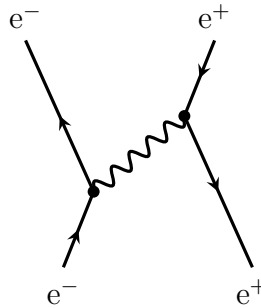
Seules les calculatrices sont autorisées.

1 Questions de cours

- 1.1** Nommer les six leptons et les six quarks du modèle standard de la physique des particules. À quelle statistique quantique obéissent-ils : fermionique ou bosonique ? Quel est leur spin ?

Les leptons du modèle standard de la physique des particules sont l'électron (noté e)^{0,25}, le neutrino électronique (ν_e)^{0,25}, le muon (μ)^{0,25}, le neutrino muonique (ν_μ)^{0,25}, le tauon (τ)^{0,25} et le neutrino tauonique (ν_τ)^{0,25}. Quant à eux, les quarks sont le up (u)^{0,25}, le down (d)^{0,25}, le charm (c)^{0,25}, le strange (s)^{0,25}, le top (t)^{0,25} et le bottom (b)^{0,25}. Tous sont des fermions^{0,25} de spin $1/2$ ^{0,25}.

- 1.2** Nommer l'interaction fondamentale et le boson de jauge mis en jeu dans la diffusion électron-positron représentée par le diagramme de Feynman ci-dessous. Que valent la masse, la charge électrique et le spin du boson vecteur échangé ?



Ici, l'électron et le positron interagissent électromagnétiquement^{0,25} car ils échangent un photon^{0,25}, représenté par une vague. Ce boson de jauge du modèle standard de la physique des particules est non massif^{0,25}, électriquement neutre^{0,25} et de spin 1 ^{0,25}.

- 1.3** Quelle est — en fm — la taille typique d'un atome ? D'un noyau ? D'un nucléon ?

Le « diamètre » d'un atome est de l'ordre de 10^5 fm^{0,25}, celui d'un noyau de 10 fm^{0,25} et celui d'un nucléon de 1 fm^{0,25}.

- 1.4** Quelle est — en $\text{MeV} \cdot c^{-2}$ (c est la vitesse de la lumière dans le vide) — la masse d'un nucléon ? D'un électron ?

La masse d'un nucléon (proton ou neutron) est à peu près de 940 $\text{MeV} \cdot c^{-2}$ ^{0,25} et celle d'un électron de $0,5(11)$ $\text{MeV} \cdot c^{-2}$ ^{0,25}.

1.5 On rappelle la formule de Bethe-Weizsäcker :

$$B(A, Z) = b_v A - b_s A^{2/3} - b_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - b_a \frac{(A-2Z)^2}{A} + \frac{b_p}{A^{a_p}}, \quad (1.1)$$

où $b_v > 0$, $b_s > 0$, $b_C > 0$, $b_a > 0$, $b_p \leq 0$ et $a_p > 0$ ne dépendent ni de A , ni de Z . Cette formule semi-empirique donne l'énergie de liaison $B(A, Z)$ d'un noyau A_ZX en fonction de son nombre de masse A et de son numéro atomique Z . On considère un groupe d'isobares comportant chacun A nucléons. Si l'un d'entre eux est stable, comment son nombre de protons Z_{stable} et son nombre de neutrons N_{stable} sont-ils contraints ? Quel nom porte l'équation que vous venez de redémontrer ?

Ici, A est le nombre de masse des isobares considérés. C'est donc une constante dans la formule de Bethe-Weizsäcker (1.1)^{0.25}. Leur énergie de liaison nucléaire $B(A, Z) = \mathcal{B}(Z)$ est une fonction polynomiale de la variable Z :

$$\mathcal{B}(Z) = -\left(\frac{b_C}{A^{1/3}} + \frac{4b_a}{A}\right) Z^2 + \left(\frac{b_C}{A^{1/3}} + 4b_a\right) Z + (b_v - b_a) A - b_s A^{2/3} + \frac{b_p}{A^{a_p}} \quad \text{0.25}.$$

La condition de stabilité s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{B}}{dZ}(Z_{\text{stable}}) &= 0 \quad \text{0.25}, && \text{c'est-à-dire} \\ -2\left(\frac{b_C}{A^{1/3}} + \frac{4b_a}{A}\right) Z_{\text{stable}} + \frac{b_C}{A^{1/3}} + 4b_a &= 0 \quad \text{0.25}, && \text{d'où} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{\text{stable}} &= \frac{1}{2} \frac{\frac{b_C}{A^{1/3}} + 4b_a}{\frac{b_C}{A^{1/3}} + \frac{4b_a}{A}} \quad \text{0.25}, && \text{soit} \\ Z_{\text{stable}} &= \frac{A}{2} \frac{1 + \frac{b_C}{4b_a} A^{-1/3}}{1 + \frac{b_C}{4b_a} A^{2/3}} \quad \text{0.25}. \end{aligned}$$

Avec $A = Z_{\text{stable}} + N_{\text{stable}}$ ^{0.25}, il vient finalement

$$Z_{\text{stable}} = \frac{Z_{\text{stable}} + N_{\text{stable}}}{2} \frac{1 + \frac{b_C}{4b_a} (Z_{\text{stable}} + N_{\text{stable}})^{-1/3}}{1 + \frac{b_C}{4b_a} (Z_{\text{stable}} + N_{\text{stable}})^{2/3}}.$$

C'est l'équation de la vallée de stabilité^{0.25}.

1.6 Le polonium-214 se transforme spontanément en plomb-210 par radioactivité α avec une énergie de désintégration Q . Connaissant les énergies de liaison nucléaire $B(214, 84) \simeq 1666,0$ MeV, $B(210, 82) \simeq 1645,6$ MeV et $B(4, 2) \simeq 28,3$ MeV, calculer Q .

La désintégration α considérée ici s'écrit



En vertu de la conservation de la masse^{0.25}, on a (équation du cours)

$$Q = B(210, 82) - B(214, 84) + B(4, 2) \quad \text{0.25} \simeq 1645,6 - 1666,0 + 28,3 = 7,9 \text{ MeV} \quad \text{0.25}.$$

- 1.7 La section efficace d'une diffusion donnée peut se calculer à l'aide de la règle d'or de Fermi de la manière suivante :

$$\sigma = \frac{2\pi V}{\hbar v} \sum_{f \neq i} |\langle \psi_f | \hat{H}^{(1)} | \psi_i \rangle|^2 \delta(E_f - E_i). \quad (1.2)$$

On suppose que la cible est totalement inerte. Que représente chacun des termes apparaissant dans cette équation ? On ne précisera pas les hypothèses, ni les calculs menant à cette identité. Que suggère la présence du « pic » de Dirac δ ?

Dans l'équation ci-dessus, σ est la section efficace de diffusion^{0,25}, V le volume occupé par les projectiles^{0,25}, \hbar la constante de Planck réduite^{0,25}, v la vitesse des projectiles avant diffusion^{0,25}, $\sum_{f \neq i}$ la somme sur tous les états quantiques des projectiles après diffusion^{0,25}, $|\psi_{f(i)}\rangle$ un état (l'état) quantique des projectiles après (avant) diffusion^{0,25}, $\hat{H}^{(1)}$ le hamiltonien d'interaction projectile-cible^{0,25} et $E_{f(i)}$ l'énergie des projectiles après (avant) diffusion^{0,25}. $\delta(E_f - E_i)$ n'est non nul que si $E_f = E_i$: la diffusion est élastique^{0,25}.

- 1.8 Comment se comporte la section efficace différentielle de Rutherford $d^2\sigma_R/d^2\Omega$ en fonction de la colatitude θ par rapport à l'axe des projectiles ? L'expression du facteur de proportionnalité n'est pas à rappeler.

C'est un résultat important du cours :

$$\frac{d^2\sigma_R}{d^2\Omega}(\theta) \propto \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad 0,25.$$

2 Filiation radioactive

Un noyau radioactif X_1 se désintègre en un noyau radioactif X_2 . On note $N_i(t)$, où $i \in \{1, 2\}$, le nombre de radioéléments X_i à l'instant $t \geq 0$ et λ_i leur constante de désintégration ($\lambda_1 \neq \lambda_2$).

- 2.1 Sachant que $N_1(t) = N_1(0) e^{-\lambda_1 t}$ et supposant que $N_2(0) = 0$, montrer que

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}). \quad (2.1)$$

Pour ce faire, on commencera par écrire la différence de population $N_2(t + \delta t) - N_2(t)$ entre deux instants proches t et $t + \delta t > t$ en fonction de λ_1 , $N_1(t)$, λ_2 , $N_2(t)$ et δt .

Pour commencer, on écrit

$$N_2(t + \delta t) - N_2(t) = -\lambda_2 N_2(t) \delta t \quad 0,25 + \lambda_1 N_1(t) \delta t \quad 0,25,$$

où le premier terme dans le membre de droite décrit les pertes, le second étant un terme de gain. On en déduit

$$\frac{dN_2}{dt}(t) \underset{\delta t \rightarrow 0}{\simeq} \frac{N_2(t + \delta t) - N_2(t)}{\delta t} \quad 0,25 = -\lambda_2 N_2(t) + \lambda_1 N_1(t) \quad 0,25.$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et avec second membre s'écrit

$$\begin{aligned}
 N_2(t) &= N_2(0) e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t dt' \lambda_1 N_1(t') e^{\lambda_2(t'-t)} \quad \mathbf{0,25} \\
 &= 0 e^{-\lambda_2 t} + \int_0^t dt' \lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_1 t'} e^{\lambda_2(t'-t)} \quad \mathbf{0,25} \\
 &= \lambda_1 N_1(0) e^{-\lambda_2 t} \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad \mathbf{0,25} \\
 &= N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \quad \mathbf{0,25}.
 \end{aligned}$$

2.2 Montrer qu'aux temps courts

$$N_2(t) \simeq N_1(0) \lambda_1 t. \quad (2.2)$$

Lorsque $t \rightarrow 0$,

$$N_2(t) \simeq N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} [1 - \lambda_2 t - (1 - \lambda_1 t)] \quad \mathbf{0,25} = N_1(0) \lambda_1 t \quad \mathbf{0,25}.$$

2.3 Montrer qu'aux temps longs

$$N_2(t) \simeq N_1(0) \frac{\lambda_1}{|\lambda_1 - \lambda_2|} e^{-\min\{\lambda_1, \lambda_2\}t}. \quad (2.3)$$

On a deux cas à distinguer : le cas où $\lambda_1 < \lambda_2$ (c'est-à-dire où $\min\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda_1$) et celui où $\lambda_1 > \lambda_2$ (c'est-à-dire où $\min\{\lambda_1, \lambda_2\} = \lambda_2$) $\mathbf{0,25}$. Quand $\lambda_1 < \lambda_2$, $e^{-\lambda_2 t}$ est négligeable par rapport à $e^{-\lambda_1 t}$ lorsque $t \rightarrow \infty$ $\mathbf{0,25}$. Aux temps longs, nous avons dans ce cas

$$N_2(t) \simeq N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (-e^{-\lambda_1 t}) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{-(\lambda_1 - \lambda_2)} e^{-\lambda_1 t} \quad \mathbf{0,25}.$$

Quand $\lambda_1 > \lambda_2$, $e^{-\lambda_1 t}$ est négligeable par rapport à $e^{-\lambda_2 t}$ lorsque $t \rightarrow \infty$ $\mathbf{0,25}$. Aux temps longs, nous avons dans ce cas

$$N_2(t) \simeq N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t} \quad \mathbf{0,25}.$$

Tous cas confondus, lorsque $t \rightarrow \infty$,

$$N_2(t) \simeq N_1(0) \frac{\lambda_1}{|\lambda_1 - \lambda_2|} e^{-\min\{\lambda_1, \lambda_2\}t} \quad \mathbf{0,25}.$$

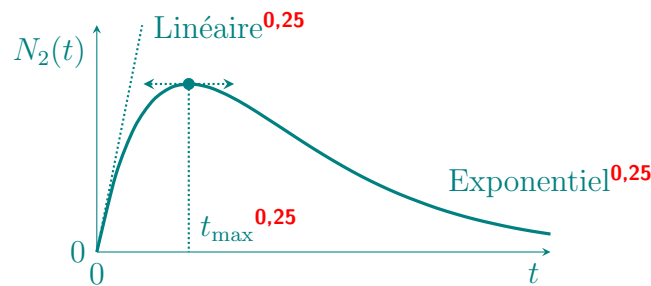
2.4 Montrer que $N_2(t)$ est maximal à l'instant

$$t_{\max} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right). \quad (2.4)$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt}(t_{\max}) &= 0^{0,25}, && \text{c'est-à-dire} \\ N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} (-\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_{\max}} + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_{\max}}) &= 0^{0,25}, && \text{d'où} \\ e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t_{\max}} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}^{0,25}, && \text{soit} \\ t_{\max} &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{0,25}. \end{aligned}$$

2.5 Tracer qualitativement $N_2(t)$ en fonction de t .



3 Noyaux légers

On considère les réactions nucléaires suivantes :



où $D = {}^2_1\text{H}$ symbolise le deuton (noyau de deutérium), $T = {}^3_1\text{H}$ le triton (noyau de tritium), et où $Q_1 \simeq 17,59$ MeV et $Q_2 \simeq 4,78$ MeV.

3.1 On donne $B(2, 1) \simeq 2,22$ MeV, l'énergie de liaison du deuton, et $B(4, 2) \simeq 28,30$ MeV, celle de la particule α . Calculer les énergies de liaison $B(3, 1)$ et $B(6, 3)$ du triton et du noyau de lithium-6, respectivement.

Au cours de la réaction (3.1), l'énergie de conserve :

$$m_p c^2 + m_n c^2 - B(2, 1) + m_p c^2 + 2 m_n c^2 - B(3, 1) = 2 m_p c^2 + 2 m_n c^2 - B(4, 2) + m_n c^2 + Q_1^{0,25},$$

et donc

$$B(3, 1) = B(4, 2) - B(2, 1) - Q_1^{0,25} \simeq 28,30 - 2,22 - 17,59 = 8,49 \text{ MeV}^{0,25}.$$

De même, au cours de la réaction (3.2),

$$3 m_p c^2 + 3 m_n c^2 - B(6, 3) + m_n c^2 = 2 m_p c^2 + 2 m_n c^2 - B(4, 2) + m_p c^2 + 2 m_n c^2 - B(3, 1) + Q_2^{0,25},$$

d'où

$$B(6, 3) = B(4, 2) + B(3, 1) - Q_2^{0,25} \simeq 28,30 + 8,49 - 4,78 = 32,01 \text{ MeV}^{0,25}.$$

- 3.2** Un deuteron et un triton ne fusionnent que si leur énergie cinétique est approximativement supérieure à 0,35 MeV. On admet (i) que la température absolue d'un gaz nucléaire est proportionnelle à l'énergie cinétique de ses constituants et (ii) qu'à une énergie cinétique de 1 eV correspond une température de 7700 K. Quelle doit être la température minimale d'un mélange de deutons et de tritons pour que la fusion (3.1) ait lieu ? La température interne du Soleil est de l'ordre de 10^7 K. Quelle conclusion vous inspire la comparaison de ces deux dernières températures ?

Pour que deutons et tritons fusionnent, il faut que leur température soit approximativement supérieure à $0,35 \times 10^6 \times 7700^{0,25} \simeq 2,70 \times 10^9$ K^{0,25}. Cette température minimale est environ 270 fois supérieure à la température interne du Soleil^{0,25}. C'est considérable... Est-ce réalisable en laboratoire ?^{0,25} La production d'un plasma de deutons et de tritons est l'un des objectifs du projet ITER (« Réacteur thermonucléaire expérimental international »), basé au Centre d'études de Cadarache, plus grand centre de recherche en Europe sur l'énergie nucléaire.

- 3.3** ${}^6_3\text{Li}$ représente environ 7,5 % du lithium naturel. Étant donnée la réaction (3.2), combien d'énergie pourrait-on extraire d'une tonne de lithium naturel par irradiation neutronique ? Si cette énergie était fournie à raison de 1 GW de puissance, au bout de combien de temps épuiserait-on la quantité de lithium-6 présente dans cette tonne de lithium naturel ?

On note \mathcal{N}_A le nombre d'Avogadro, m la masse de l'échantillon de lithium naturel et \mathcal{M} la masse molaire du lithium-6. L'énergie que nous pourrions extraire d'une tonne de lithium naturel par bombardement de neutrons est

$$\frac{\mathcal{N}_A \frac{7,5}{100} m}{\mathcal{M}} Q_2^{0,25} \simeq \frac{6,02 \times 10^{23} \times \frac{7,5}{100} \times 10^6}{6} \times 4,78 \times 10^6 \times 1,60 \times 10^{-19}^{0,25} \simeq 5,76 \times 10^{15} \text{ J}^{0,25}.$$

À raison de 1 GW de puissance, toute cette énergie de désintégration pourrait être extraite en environ $5,76 \times 10^{15} / (10^9 \times 3600 \times 24)^{0,25} \simeq 67$ j^{0,25}.

- 3.4** Un faisceau de neutrons dont le flux vaut 10^6 s^{-1} frappe perpendiculairement une cible de lithium-6 épaisse de 5 mm. Sachant que la section efficace de la réaction (3.2) est de 945 b environ et que la masse volumique du lithium-6 vaut approximativement $0,534 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, déterminer le nombre d'éjectiles produits selon (3.2) en une heure.

Avec les notations du cours, le nombre d'évènements par unité de temps s'écrit

$$\frac{dN}{dt} = \sigma \cdot j \cdot N_c^{0,25} = \sigma \cdot \frac{\Phi}{S} \cdot n_c e S^{0,25} = \sigma \cdot \Phi \cdot \frac{\mathcal{N}_A \rho}{\mathcal{M}} e^{0,25},$$

où ρ est la masse volumique du lithium-6. En une heure, nous détecterons donc

$$3600 \frac{dN}{dt} \simeq 3600 \times 945 \times 10^{-28} \times 10^6 \times \frac{6,02 \times 10^{23} \times 0,534 \times 10^6}{6} \times 5 \times 10^{-3}^{0,25} \simeq 91 \times 10^9^{0,25}$$

évènements.

4 Potentiel de Yukawa

- 4.1** Soit une particule relativiste, massive et libre. Comment s'écrit le carré de son énergie E en fonction de sa masse m , son impulsion \mathbf{p} et c , la vitesse de la lumière dans le vide ?

C'est un résultat important du cours :

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2 \text{0,25}.$$

- 4.2** En effectuant les substitutions canoniques $E \mapsto i \hbar \partial/\partial t$ et $\mathbf{p} \mapsto -i \hbar \nabla$ de la mécanique quantique (\hbar est la constante de Planck réduite), montrer que la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}, t)$ de cette particule, supposée sans spin, vérifie l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (4.1)$$

où ξ est une longueur à déterminer en fonction de \hbar , m et c . Pour quelle valeur de ξ (c'est-à-dire de m) l'équation (4.1) se réduit-elle à l'équation de d'Alembert scalaire ?

À l'aide du résultat précédent, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \Psi(\mathbf{r}, t) &= [m^2 c^4 + c^2 (-i \hbar \nabla)^2] \Psi(\mathbf{r}, t) \text{0,25} \\ -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) &= (m^2 c^4 - c^2 \hbar^2 \nabla^2) \Psi(\mathbf{r}, t) \text{0,25} \\ \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) &= 0 \text{0,25}. \end{aligned}$$

La longueur ξ de l'énoncé s'écrit donc $\xi = \hbar/(m c) \text{0,25}$. Lorsque $\xi = \infty$ (c'est-à-dire $m = 0$) 0,25 , l'équation de Klein-Gordon ci-dessus se réduit à l'équation des ondes scalaires.

- 4.3** On s'intéresse maintenant à une variante de l'équation différentielle (4.1), qui s'écrit

$$\left(-\nabla^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) \Phi(\mathbf{r}) = g \delta^{(3)}(\mathbf{r}), \quad (4.2)$$

où g est une constante réelle non nulle et $\delta^{(3)}$ la « fonction » de Dirac à trois dimensions. Quelle hypothèse doit-on faire pour passer du membre de gauche de l'équation (4.1) à celui de l'équation (4.2) ? Du membre de droite de l'équation (4.2) à celui de l'équation (4.1) ?

Pour passer du membre de gauche de l'équation (4.1) à celui de l'équation (4.2), il suffit de supposer que Ψ ne dépend pas du temps : $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Phi(\mathbf{r}) \text{0,25}$. Pour passer du membre de droite de l'équation (4.2) à celui de l'équation (4.1), il suffit de prendre $\mathbf{r} \neq 0 \text{0,25}$.

- 4.4** Montrer que la transformée de Fourier $\tilde{\Phi}(\mathbf{k}) = \int d^3r \Phi(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ de $\Phi(\mathbf{r})$ s'écrit

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{k}) = \frac{g}{\mathbf{k}^2 + 1/\xi^2}. \quad (4.3)$$

Nous développons de Fourier $\Phi(\mathbf{r})$ et $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ dans l'équation (4.2) :

$$\begin{aligned} \left(-\nabla^2 + \frac{1}{\xi^2}\right) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= g \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \text{soit} \\ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tilde{\Phi}(\mathbf{k}) \left[\underbrace{-(i\mathbf{k})^2}_{=\mathbf{k}^2} + \frac{1}{\xi^2} \right] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad \ll \text{d'où} \gg \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{k}) \left(\mathbf{k}^2 + \frac{1}{\xi^2} \right) &= g, \quad \text{puis} \\ \tilde{\Phi}(\mathbf{k}) &= \frac{g}{\mathbf{k}^2 + 1/\xi^2}. \end{aligned}$$

4.5 En déduire que (on note $r = |\mathbf{r}|$)

$$\Phi(\mathbf{r}) = V_Y(r) = \alpha \frac{e^{-\beta r}}{r}, \quad (4.4)$$

où α et β sont à déterminer en fonction de g et ξ . Pour ce faire, on tirera parti de l'identité bien connue

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + k_0^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-|k_0|r}}{r}, \quad (4.5)$$

valable pour tout réel k_0 ¹. La fonction (4.4) est connue sous le nom de potentiel de Yukawa. Ce dernier décrit l'interaction véhiculée par un boson massif de spin nul. Cette interaction n'est pas fondamentale puisque les bosons de jauge du modèle standard de la physique des particules sont de spin 1. Le potentiel de Yukawa est parfois appelé potentiel de Coulomb écranté car en posant $g = q q' / \varepsilon_0$ (ε_0 est la permittivité du vide) et $\xi = \infty$ (c'est-à-dire $m = 0$), $V_Y(r)$ est identique à l'énergie potentielle d'interaction coulombienne entre deux particules de charges électriques q et q' .

On a

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{g}{\mathbf{k}^2 + 1/\xi^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-r/\xi}}{r} = V_Y(r).$$

4.6 Un proton et un neutron interagissent en échangeant un pion neutre π^0 , qui est un boson de masse $m_{\pi^0} \simeq 135 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$ et de spin nul. Connaissant la valeur de $\hbar c$ en $\text{MeV} \cdot \text{fm}$, estimer la portée ξ_{π^0} de cette interaction. Celle-ci est du même ordre de grandeur que la portée d'une des quatre interactions fondamentales de la physique des particules. Laquelle ?

1. Cette intégrale se calcule facilement en coordonnées sphériques et à l'aide du théorème des résidus :

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{k}^2 + k_0^2} &= \int_{k=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{k^2 \sin \theta dk d\theta d\varphi}{(2\pi)^3} \frac{e^{ikr \cos \theta}}{k^2 + k_0^2} \quad (\text{coordonnées sphériques}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 r} \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 + |k_0|^2} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2 r} \text{Im} \left(2\pi i \times \frac{e^{i \times i |k_0| \times r}}{2} \right) \quad (\text{théorème des résidus}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-|k_0|r}}{r}. \end{aligned}$$

La portée de l'interaction véhiculée par le pion π^0 est

$$\xi_{\pi^0} = \frac{\hbar}{m_{\pi^0} c} \stackrel{0,25}{=} \frac{\hbar c}{m_{\pi^0} c^2} \simeq \frac{197}{135} \stackrel{0,25}{=} \simeq 1,5 \text{ fm} \stackrel{0,25}{=}.$$

La portée de cette interaction est du même ordre de grandeur que celle de l'interaction forte^{0,25}.