Particules et noyaux

Examen de 2e session

Jeudi 2 juillet 2020

17 h — 18 h 30

Seules les calculatrices sont autorisées.

1 Énergie de liaison de l'actinium-227

On considère les trois premiers maillons de la chaîne de désintégration naturelle de l'uranium-235 :

$$^{235}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{231}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\beta^-} {}^{231}_{91}\mathrm{Pa} \xrightarrow{\alpha} {}^{227}_{89}\mathrm{Ac}. \tag{1.1}$$

Calculer l'énergie de liaison de l'actinium-227 à l'aide des données suivantes :

- Énergie libérée lors de la première désintégration α : $Q_{\alpha,1} \simeq 7{,}7$ MeV.
- Énergie libérée lors de la désintégration β^- : $Q_{\beta^-} \simeq 0{,}4$ MeV.
- Énergie libérée lors de la seconde désintégration α : $Q_{\alpha,2} \simeq 5{,}1$ MeV.
- Ordonnée du point repérant l'uranium-235 sur la courbe d'Aston : $y_{235} \simeq 7{,}6$ MeV.
- Ordonnée du point repérant la particule α sur la courbe d'Aston : $y_4 \simeq 7{,}1$ MeV.
- Énergie de masse du proton : $m_\mathrm{p}\, c^2 \simeq 938{,}3$ MeV.
- Énergie de masse du neutron : $m_\mathrm{n}\, c^2 \simeq 939{,}6$ MeV.
- Énergie de masse de l'électron : $m_\mathrm{e}\, c^2 \simeq 0{,}5$ MeV.

D'après le cours,

$$\begin{aligned} Q_{\alpha,1} &= B(231,90) - B(235,92) + B(4,2)^{\mathbf{1}}, \\ Q_{\beta^-} &= B(231,91) - B(231,90) - m_\mathrm{p}\, c^2 + m_\mathrm{n}\, c^2 - m_\mathrm{e}\, c^{2\,\mathbf{1}} \quad \text{et} \\ Q_{\alpha,2} &= B(227,89) - B(231,91) + B(4,2)^{\mathbf{1}}. \end{aligned}$$

En sommant ces trois équations membre-à-membre, on obtient une équation dont la seule inconnue est $B(227,89)$[1]. Sachant que $B(235,92) = 235\, y_{235}$ et que $B(4,2) = 4\, y_4$[1], on trouve finalement que $B(227,89) \simeq 1741{,}6$ MeV[1].

2 Section efficace d'interaction neutron-proton

Un faisceau de neutrons traverse une enceinte puis atteint un détecteur. Ce dernier compte 5×10^5 neutrons par seconde lorsque l'enceinte est vide et $4{,}6 \times 10^5$ neutrons par seconde lorsqu'elle est remplie d'hydrogène à raison de 4×10^{22} atomes par centimètre cube. Sachant que l'enceinte fait un mètre de long, calculer la section efficace d'interaction neutron-proton.

Lorsque l'enceinte est remplie d'hydrogène, le flux $\Phi(x)$ de neutrons décroît exponentiellement avec la distance x parcourue dans l'enceinte :

$$\Phi(x) = \Phi(0)\,\mathrm{e}^{-x/\ell\,\mathbf{1}}, \quad \text{où} \quad \ell = \frac{1}{d\,\sigma}^{\mathbf{1}}$$

est le libre parcours moyen des neutrons, exprimé en fonction de la densité d d'hydrogène et de la section efficace σ d'interaction entre les neutrons et les noyaux d'hydrogène (protons). Si L dénote la longueur de l'enceinte, on a donc

$$\sigma = \frac{1}{d\,L}\ln\left[\frac{\Phi(0)}{\Phi(L)}\right]^{\mathbf{1}}.$$

Lorsque l'enceinte est vide, le flux détecté n'est rien d'autre que $\Phi(0)$ (pas d'atténuation)[1]. L'application numérique donne $\sigma \simeq 2{,}1 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}^2$[1].

3 Temps de vie du neutron

Le neutron se désintègre en un proton par radioactivité β^- :

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e} + \bar{\nu}_{\mathrm{e}}. \tag{3.1}$$

On se place dans le référentiel du neutron, dans une grande boîte cubique de côté L munie des conditions aux bords périodiques. La règle d'or de Fermi et l'approximation de l'interaction de contact de Fermi permet de calculer le temps de vie τ du neutron sous la forme

$$\frac{1}{\tau} = \int \left(\frac{L}{2\pi\,\hbar}\right)^9 \mathrm{d}^3p_{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}^3p_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}^3p_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}}\,\frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{G_{\mathrm{F}}}{L^3}\right)^2\left(\frac{2\pi\,\hbar}{L}\right)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathrm{p}} + \mathbf{p}_{\mathrm{e}} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}})\,\delta(E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{e}} + E_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}} - m_{\mathrm{n}}\,c^2). \tag{3.2}$$

On donne :

- Énergie de masse du neutron : $m_{\mathrm{n}}\,c^2 \simeq 939{,}6$ MeV.
- Énergie de masse du proton : $m_{\mathrm{p}}\,c^2 \simeq 938{,}3$ MeV.
- Recul du proton : négligeable.
- Énergie de masse de l'électron : $m_{\mathrm{e}}\,c^2 \simeq 0{,}5$ MeV.
- Énergie de masse de l'antineutrino électronique : négligeable.
- Constante de couplage de Fermi divisée par $(\hbar\,c)^3$: $G_{\mathrm{F}}/(\hbar\,c)^3 \simeq 10^{-11}\ \mathrm{MeV}^{-2}$.

3.1 Expliquer brièvement l'équation (3.2).

Dans le référentiel du neutron, $\mathbf{p}_{\mathrm{n}} = 0$ et $E_{\mathrm{n}} = m_{\mathrm{n}}\,c^2$[1], d'où

$$\frac{1}{\tau} = \underbrace{\int \left(\frac{L}{2\pi\,\hbar}\right)^9 \mathrm{d}^3p_{\mathrm{p}}\,\mathrm{d}^3p_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}^3p_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}}}_{\sum_{f\neq i}\ \mathbf{1}}\,\overbrace{\frac{2\pi}{\hbar}\underbrace{\left(\frac{G_{\mathrm{F}}}{L^3}\right)^2\left(\frac{2\pi\,\hbar}{L}\right)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_{\mathrm{p}} + \mathbf{p}_{\mathrm{e}} + \mathbf{p}_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}})}_{\substack{|\langle\psi_f|\hat{H}^{(1)}|\psi_i\rangle|^2 \text{ dans l'approximation} \\ \text{de l'interaction de contact de Fermi}\ \mathbf{1}}}\,\underbrace{\delta(E_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{e}} + E_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}} - m_{\mathrm{n}}\,c^2)}_{\delta(E_f - E_i)\ \mathbf{1}}}^{\text{Règle d'or de Fermi}\ \mathbf{1}}.$$

3.2 Intégrer sur $\mathbf{p}_\mathrm{p}$ puis sur les directions angulaires de $\mathbf{p}_\mathrm{e}$ et $\mathbf{p}_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}$ pour établir que

$$\frac{1}{\tau} = \frac{{G_\mathrm{F}}^2}{2\,\pi^3\,\hbar^7} \int \mathrm{d}p_\mathrm{e}\,{p_\mathrm{e}}^2\,\mathrm{d}p_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}\,{p_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}}^2\,\delta(c\,p_{\bar{\nu}_\mathrm{e}} + E_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}\,c^2 - m_\mathrm{n}\,c^2). \tag{3.3}$$

Le recul du proton est négligeable : $E_\mathrm{p} \simeq m_\mathrm{p}\,c^2$[1]. La masse de l'antineutrino électronique l'est aussi : $E_{\bar{\nu}_\mathrm{e}} \simeq c\,p_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}$[1]. L'intégrale sur $\mathbf{p}_\mathrm{p}$ vaut 1[1] et la transformation de $\mathbf{p}_\mathrm{e}$ et $\mathbf{p}_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}$ en coordonnées sphériques fait apparaître un $(4\,\pi)^2$ au numérateur[1], d'où le résultat[1].

3.3 Vérifier que

$$\delta(c\,p_{\bar{\nu}_\mathrm{e}} + E_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}\,c^2 - m_\mathrm{n}\,c^2) = \frac{1}{c}\,\delta\left(p_{\bar{\nu}_\mathrm{e}} + \frac{E_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}\,c^2 - m_\mathrm{n}\,c^2}{c}\right) \tag{3.4}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{\tau} = \frac{{G_\mathrm{F}}^2}{2\,\pi^3\,\hbar^7\,c^3} \int \mathrm{d}p_\mathrm{e}\,{p_\mathrm{e}}^2\,(E_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}\,c^2 - m_\mathrm{n}\,c^2)^2. \tag{3.5}$$

Il faut utiliser les propriétés suivantes de la distribution de Dirac :

$$\delta(a\,x) = \frac{\delta(x)}{|a|}\text{[1]} \quad \text{et} \quad \int \mathrm{d}x\,f(x)\,\delta(x-a) = f(a)\text{[1]},$$

d'où le résultat[1].

3.4 Montrer que

$$\mathrm{d}p_\mathrm{e}\,{p_\mathrm{e}}^2 = \mathrm{d}E_\mathrm{e}\,\frac{E_\mathrm{e}\,\sqrt{{E_\mathrm{e}}^2 - (m_\mathrm{e}\,c^2)^2}}{c^3} \tag{3.6}$$

et en déduire que

$$\frac{1}{\tau} = \frac{[G_\mathrm{F}/(\hbar\,c)^3]^2}{2\,\pi^3\,\hbar} \int \mathrm{d}E_\mathrm{e}\,E_\mathrm{e}\,\sqrt{{E_\mathrm{e}}^2 - (m_\mathrm{e}\,c^2)^2}\,(E_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}\,c^2 - m_\mathrm{n}\,c^2)^2. \tag{3.7}$$

Pour obtenir ce résultat[1], il suffit de différencier ${E_\mathrm{e}}^2 = (m_\mathrm{e}\,c^2)^2 + c^2\,{p_\mathrm{e}}^2$[1] membre-à-membre et d'utiliser $p_\mathrm{e} = \sqrt{{E_\mathrm{e}}^2 - (m_\mathrm{e}\,c^2)^2}/c$[1].

3.5 Évaluer τ en minutes en faisant fi du $2\,\pi^3$ dans l'équation (3.7) et en approximant l'intégrale par l'aire d'un rectangle dont la base, centrée en $E_\mathrm{e} = 1$ MeV, est de largeur $\Delta E_\mathrm{e} = 0{,}1$ MeV.

On évalue τ comme

$$\tau \sim \left\{\frac{[G_\mathrm{F}/(\hbar\,c)^3]^2}{\hbar}\,\Delta E_\mathrm{e}\,E_\mathrm{e}\,\sqrt{{E_\mathrm{e}}^2 - (m_\mathrm{e}\,c^2)^2}\,(E_\mathrm{e} + m_\mathrm{p}\,c^2 - m_\mathrm{n}\,c^2)^2\right\}^{-1}\text{[1]},$$

ce qui donne $\tau \sim 15$ min[1].