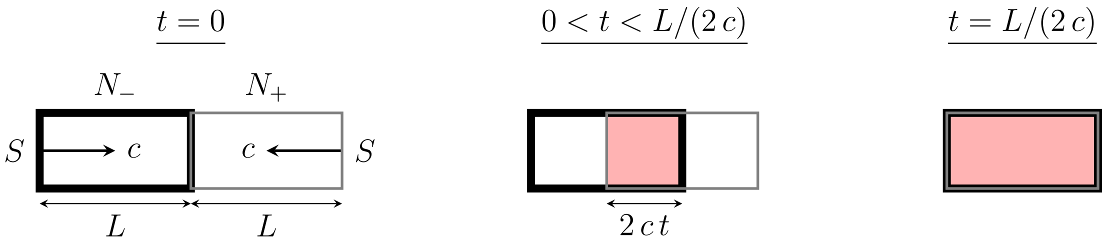
Particules et noyaux

Devoir-maison

Exercice 2.6 du fascicule : Section efficace différentielle de diffusion dans un collisionneur électron-positron

1 Les mesures sont naturellement effectuées dans le référentiel du laboratoire. L'instant $t = 0$ marque la rencontre des paquets. À l'instant $t = L/(2\,c)$, où L est la longueur de chacun des paquets, ceux-ci se recouvrent intégralement. À un instant t intermédiaire, les paquets se recouvrent partiellement sur une longueur $2\,c\,t$.



Le nombre de collisions entre les instants $t = 0$ et $t = L/(2\,c)$ s'écrit

$$N_1 = \int_0^{L/(2\,c)} \mathrm{d}t\ \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}(t),$$

où $(\mathrm{d}N_1/\mathrm{d}t)(t)$ est le nombre de collisions par unité de temps à l'instant $0 < t < L/(2\,c)$. Vous savez relier ce type d'objet à la section efficace de collision dans le cas simple où des projectiles sont envoyés sur des cibles immobiles. Nous nous ramenons à cette situation en nous plaçant provisoirement dans le référentiel d'un des paquets. Prenons celui des positrons, alors considérés comme cibles par les électrons, qui sont les projectiles. Le paquet d'électrons est homogène de densité volumique $n_\mathrm{f} = N_-/(L\,S)$ et leur vitesse par rapport aux positrons est $v = 2\,c$. La densité de courant d'électrons-projectiles est donc

$$j = n_\mathrm{f}\,v = \frac{1}{S}\,N_-\,\frac{2\,c}{L}.$$

Le paquet de positrons est homogène de densité volumique $n_\mathrm{c} = N_+/(L\,S)$ et ceux pris pour cibles par les électrons à l'instant $0 < t < L/(2\,c)$ occupent le volume $e(t)\,S = 2\,c\,t\,S$. À cet instant, le nombre de positrons-cibles est donc

$$N_\mathrm{c}(t) = n_\mathrm{c}\,e(t)\,S = N_+\,\frac{2\,c}{L}\,t.$$

On en déduit, σ étant la section efficace de collision, que

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}(t) = \sigma\,j\,N_\mathrm{c}(t) = \frac{\sigma}{S}\,N_-\,N_+\left(\frac{2\,c}{L}\right)^2 t,$$

d'où

$$N_1 = \frac{\sigma}{S}\, N_-\, N_+ \left(\frac{2\,c}{L}\right)^2 \int_0^{L/(2\,c)} \mathrm{d}t\; t = \frac{1}{2}\,\frac{\sigma}{S}\, N_-\, N_+.$$

Cependant, entre l'instant $t = L/(2\,c)$, qui marque le recouvrement total des paquets, et l'instant $t = L/c$, qui marque leur séparation, les électrons et les positrons continuent d'interagir entre eux. Sur cette durée $L/(2\,c)$, on enregistre également N_1 collisions. Ainsi, au court d'un croisement des paquets, on détecte

$$N_2 = 2\,N_1 = \frac{\sigma}{S}\, N_-\, N_+$$

évènements. Supposons que les mesures sont effectuées à l'un des deux endroits où les paquets se croisent. Comme ceux-ci se déplacent à la vitesse c et que la circonférence du collisionneur est $2\pi\, R$, les croisements sujets à détections sont périodiques de fréquence $\nu = c/(2\pi\, R)$. Il s'ensuit que le nombre de collisions détectables par unité de temps s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \nu\, N_2 = \frac{c}{2\pi\, R}\,\frac{\sigma}{S}\, N_-\, N_+.$$

Il est facile de reformuler cette expression en termes des courants électriques

$$I_\mp = \nu\, |\mp e\, N_\mp| = \frac{c}{2\pi\, R}\, e\, N_\mp.$$

On trouve sans trop d'effort

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{2\pi\, R}\,\frac{\sigma}{S}\,\frac{2\pi\, R}{c}\,\frac{I_-}{e}\,\frac{2\pi\, R}{c}\,\frac{I_+}{e} = \frac{2\pi\, R}{c}\,\frac{\sigma}{S}\,\frac{I_-\, I_+}{e^2}.$$

Le raisonnement qui nous a permis d'aboutir à cette expression est totalement faux. En effet, nous avons voyagé entre le référentiel du laboratoire et celui des positrons comme Galilée l'aurait fait. Nous savons depuis Lorentz que ceci est interdit à grande vitesse, d'autant plus si celle-ci avoisine celle de la lumière dans le vide, comme c'est le cas ici. Surprenamment, la formule établie ci-dessus est juste. Ceci tient au fait que les faisceaux sont colinéaires (collisions frontales). La quantité

$$\mathscr{L} = \frac{1}{\sigma}\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

est appelée luminosité. Par construction, elle s'exprime en $\mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ ou en $\mathrm{b}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

2 Il faut imaginer qu'à la figure 7 du cours, le point M décrit une couronne $\mathscr{C}$ d'axe (Oz) couvrant les colatitudes $\theta_1 < \theta < \theta_2$, où $\theta_1 = 3°$ et $\theta_2 = 8°$. La section efficace différentielle de collision est du type Rutherford, variant comme θ^{-4} aux petites colatitudes examinées ici car $\sin\epsilon \simeq \epsilon$ lorsque $|\epsilon| \ll 1$. Sur une durée $T = 1$ h, le détecteur $\mathscr{C}$ compte

$$N_{\mathscr{C}} = \int_0^T \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}N_{\mathscr{C}}}{\mathrm{d}t}(t)$$

évènements, où

$$\frac{\mathrm{d}N_{\mathscr{C}}}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{2\pi\, R}{c}\,\frac{\int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}^2\Omega\; (\mathrm{d}^2\sigma/\mathrm{d}^2\Omega)(\theta)}{S}\,\frac{I_-\, I_+}{e^2}.$$

Ce taux réactionnel est clairement indépendant du temps et

$$\int_{\mathscr{C}} \mathrm{d}^2\Omega \, \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}^2\Omega}(\theta) \simeq \int_{\theta_1}^{\theta_2} \mathrm{d}\theta \, \theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(\frac{4\,\alpha\,\hbar\,c}{E}\right)^2 \theta^{-4} = \pi \left(\frac{4\,\alpha\,\hbar\,c}{E}\right)^2 ({\theta_1}^{-2} - {\theta_2}^{-2}),$$

où l'angle solide élémentaire $\mathrm{d}^2\Omega \overset{\text{déf.}}{=} \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \simeq \theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$. Il en résulte que

$$N_{\mathscr{C}} = T \, \frac{2\pi\,R}{c} \, \frac{\pi\,(4\,\alpha\,\hbar\,c/E)^2\,({\theta_1}^{-2} - {\theta_2}^{-2})}{S} \, \frac{I_-\,I_+}{e^2} \sim 10^3.$$

Exercice 2.7 du fascicule : Détection de neutrinos cosmiques

Le nombre total de réactions antineutrino électronique-proton est, d'après le cours,

$$N = T\,\sigma\,j\,N_{\mathrm{c}},$$

où T est la durée sur laquelle les $N_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}} \simeq 10^{57}$ (c'est beaucoup !) antineutrinos électroniques sont émis, $\sigma \simeq 1{,}64 \times 10^{-45}$ m^2 la section efficace de réaction antineutrino électronique-proton, j la densité de courant d'antineutrinos électroniques et N_{c} le nombre de protons pris pour cibles par les antineutrinos électroniques à Kamiokande. Le flux d'antineutrinos électroniques $\Phi = N_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}}/T$ et $S = 4\,\pi\,r^2$, avec $r \simeq 1{,}5 \times 10^5$ al, est la surface de la sphère dont le centre est SN 1987A et dont l'un des points est la Terre. La densité de courant $j = \Phi/S$ s'écrit donc

$$j = \frac{N_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}}/T}{4\,\pi\,r^2}.$$

Notant $\mathcal{N}_{\mathrm{A}} \simeq 6{,}02 \times 10^{23}$ mol^{-1} le nombre d'Avogadro, $m = 2$ kt la masse d'eau dans le réservoir de Kamiokande et $\mathcal{M} \simeq 18$ g $\cdot$ mol^{-1} la masse molaire de l'eau, on a d'autre part

$$N_{\mathrm{c}} = \frac{2\,\mathcal{N}_{\mathrm{A}}\,m}{\mathcal{M}},$$

où le facteur 2 compte les protons pris pour cibles par les antineutrinos électroniques dans une molécule d'eau (ce sont ceux des deux atomes d'hydrogène constituant la molécule d'eau). Au bilan,

$$N = \frac{N_{\bar{\nu}_{\mathrm{e}}}\,\mathcal{N}_{\mathrm{A}}\,m}{2\pi\,\mathcal{M}}\,\frac{\sigma}{r^2} \sim 10.$$

Ce n'est pas beaucoup…